



مجلة القلزم العلمية



ISSN: 1858 - 9766

علمية دولية محكمة ربع سنوية

تصدر عن مركز بحوث ودراسات دول حوض البحر الأحمر وأكاديمية المنهل للعلوم-السودان

في هذا العدد :

- أثر التخطيط الاستراتيجي في التنمية الاقتصادية الحضرية
بمدينة الخرطوم (2000-2021م)
د. يوسف عز الدين إبراهيم نقد الله
- التكيف الفقهي للمواطنة والجنسية
د. خالد فايت حسب الله
- حكم التلقيح الصناعي في الشريعة الإسلامية
د. نوال بشرى أحمد
- Sharp Embeddings of Besov Spaces Involving Small Logarithmic
Smoothness
ShawgyHussein -Hind Mohammed
- Topological vector space
Dr. Tagreed Ahmed fadeel Mohamed



العدد الثامن - جمادي الثاني 1442 هـ - يونيو 2021 م

فهرسة المكتبة الوطنية السودانية-السودان

مجلة القلزم: Al Qulzum Scientific Journal

الخرطوم : مركز بحوث ودراسات دول حوض البحر الأحمر

2021 تصدر عن دار آريثيريا للنشر والتوزيع- السوق

العربي-الخرطوم-السودان

ردمك: 1858-9766

الخرطوم- السودان

هيئة التحرير

الهيئة العلمية والاستشارية

- أ.د. يوسف فضل حسن (السودان)
أ.د. علي عثمان محمد صالح (السودان)
أ.د. عبد العزيز بن راشد السنيدي
(المملكة العربية السعودية)
أ.د. أبوبكر حسن محمد باشا (السودان)
أ.د. محجوب محمد آدم (السودان)
أ.د. سيف الإسلام بدوي (السودان)
أ.د. صبري فارس كماش الهيتي (العراق)
أ.د. محمد البشير عبد الهادي (السودان)
د. علي صالح كرار (السودان)
د. سامي شرف محمد غالب (اليمن)
د. محمد عبد الرحمن محمد عريف
(جمهورية مصر العربية)

رئيس هيئة التحرير

د. حاتم الصديق محمد أحمد

رئيس التحرير

د. عوض أحمد حسين شبا

نائب رئيس التحرير

د. سلمى عثمان سيد أحمد

سكرتير التحرير

أ. عثمان يحيى

التدقيق اللغوي

أ. الفاتح يحيى محمد عبد القادر (السودان)

الإشراف الإلكتروني

د. بهية فهد الشريف (المملكة العربية السعودية)

التصميم والإخراج الفني

أ. عادل محمد عبد القادر (السودان)

الآراء والأفكار التي تنشر في المجلة تحمل وجهة نظر كاتبها ولا تعبر بالضرورة عن آراء المركز

ترسل الأوراق العلمية عبر العنوان التالي

هاتف: +249121566207 - +249910785855

بريد إلكتروني : rsbcrrsc@gmail.com

السودان- الخرطوم - السوق العربي عمارة جي تاون الطابق الثالث

موجهات النشر

تعريف المجلة:

مجلة (القلزم) مجلة علمية مُحَكَّمة تصدر عن مركز بحوث ودراسات دول حوض البحر الأحمر. تهتم المجلة بالبحوث والدراسات التي تخص حوض البحر الأحمر والدول المطلة عليه والمواضيع ذات الصلة.

موجهات المجلة:

1. يجب أن يتسم البحث بالجودة والأصالة وألا يكون قد سبق نشره قبل ذلك.
 2. على الباحث أن يقدم بحثه من نسختين. وأن يكون بخط (Traditional Arabic) بحجم 14 على أن تكون الجداول مرقمة وفي نهاية البحث وقبل المراجع على أن يشار إلى رقم الجدول بين قوسين دائريين ().
 3. يجب ترقيم جميع الصفحات تسلسلياً وبالأرقام العربية بما في ذلك الجداول والأشكال التي تلحق بالبحث.
 4. المصادر والمراجع الحديثة يستخدم أسم المؤلف، اسم الكتاب، رقم الطبعة، مكان الطبع، تاريخ الطبع، رقم الصفحة.
 5. المصادر الاجنبية يستخدم اسم العائلة (Hill, R).
 5. يجب ألا يزيد البحث عن 30 صفحة وبالإمكان كتابته باللغة العربية أو الإنجليزية
 6. يجب أن يكون هناك مستخلص لكل بحث باللغتين العربية والإنجليزية على ألا يزيد على 200 كلمة بالنسبة للغة الإنجليزية. أما بالنسبة للغة العربية فيجب أن يكون المستخلص وافياً للبحث بما في ذلك طريقة البحث والنتائج والاستنتاجات مما يساعد القارئ العربي على استيعاب موضوع البحث وبما لا يزيد عن 300 كلمة.
 5. لا تلتزم هيئة تحرير المجلة بإعادة الأوراق التي لم يتم قبولها للنشر.
 - * على الباحث إرفاق عنوانه كاملاً مع الورقة المقدمة (الاسم رباعي، مكان العمل، الهاتف، البريد الإلكتروني).
- نأمل قراءة شروط النشر قبل الشروع في إعداد الورقة العلمية

بسم الله الرحمن الرحيم

كلمة التحرير

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.

وبعد

القارئ الكريم:

السلام عليك ورحمة الله وبركاته.. نطل على حضراتكم من نافذة جديدة من نوافذ النشر العلمي وهي مجلة القلزم العلمية، وهي مجلة القلزم العلمية، ونحن في غاية السعادة والمجلة تصل عددها الثامن بفضل الله تعالى ومنته.

القارئ الكريم:

هذه المجلة تصدر بالشراكة مع كلية المنهل للعلوم وهي إحدى الكليات السودانية الفتية التي وضعت بصمات مميزة في مسيرة البحث العلمي، وهذا العدد هو العدد الثامن في إطار هذه الشراكة العلمية التي تأتي في إطار استراتيجية مركز بحوث ودراسات دول حوض البحر الأحمر في تفعيل الحراك العلمي والبحثي.

القارئ الكريم:

هذا العدد يشتمل على عدد من البحوث والدراسات المهمة ذات البعد النظري والتطبيقي ولضمان نجاح واستمرارية هذه المجلة بإذن الله تعالى نأمل أن يرفدنا الباحثون بمزيد من اسهاماتهم العلمية المميّزة مع خالص الشكر والتقدير للجميع.

أسرة التحرير

المحتويات

- 1- أثر التخطيط الاستراتيجي في التنمية الاقتصادية الحضرية بمدينة الخرطوم
(2000 - 2021م)..... د. يوسف عز الدين إبراهيم نقد الله (34-7)
- 2- التكيف الفقهي للمواطنة والجنسية..... د. خالد فايت حسب الله (52-35)
- 3- حياة المهاجرين والأنصار في المدينة المنورة بعد الهجرة النبوية الشريفة
د. عبد المنعم يوسف عبد الحفيظ الزبير..... (78-53)
- 4- حكم التلقيح الصناعي في الشريعة الإسلامية
د. نوال بشرى أحمد..... (90-79)
- 5- الحماية الموضوعية للنظام العام الاقتصادي في السودان
د. يونس أحمد آدم القدال- د. الحسين عوض الجيد الطائف دفع الله..... (108-91)
- 6- A system of Integral Equations Via Measure of Non-Compactness Existence of Solutions in Banach` Spaces
Dr. Nagla Tag Elsir Mohamed Elhassan..... (109-126)
- 7- Use of data mining technology to identify factors affecting cataracts
(Applying to Makkah Eye Hospital 2016-2017)
Nabila Tariq AbdulNabi Muhammad..... (127-144)
- 8-The effect of mathematical modeling in solving applied problems of university students in mathematics (University of Sudan case study (2018-2020)
Ruaa Badraldeen Mohanmed salih Nimir..... (145-164)
- 9- Sharp Embeddings of Besov Spaces Involving Small Logarithmic Smoothness
ShawgyHussein-HindMohammed..... (165-186)
- 10- Symmetry and Invariants
Haram Mobarak El Emam AL Haj- M.A.Bashir- Abbas Abdel Aziz Gumaa Mahmoud..... (187-200)
- 11- Topological vector space
Dr. TagreedAhmedfadeelMohamed..... (201-214)

أثر التخطيط الاستراتيجي في التنمية الاقتصادية (الحضرية بمدينة الخرطوم (2000 - 2021م

قسم التخطيط الحضري - كلية العلوم
الحضرية - جامعة الزعيم الأزهري

المجلس الأعلى للاستراتيجية والمعلومات-
ولاية الخرطوم

أ. يوسف عز الدين إبراهيم نقد الله

أ. عمر محمد علي عبد الرحيم

المستخلص

تناولت الدراسة أثر التخطيط الاستراتيجي في التنمية الاقتصادية الحضرية بمدينة الخرطوم (2000 - 2021م). تمثلت مشكلة الدراسة في أن معظم المدن السودانية تعاني من الأخطاء التقليدية في التنمية الحضرية وعدم استخدام منهج علمي وعملي في التنمية بل الاكتفاء بإدارة الأزمات في المدن دون العمل بنظرة تشاركية شمولية استراتيجية لحل التدهور الاقتصادي والتفكك الاجتماعي والآثار المترتبة عليها. نبعت أهمية الدراسة من أنها تتناول موضوع يعتبر من الجوانب الحيوية في ازدهار مدينة الخرطوم واستقرارها وتقدمها، كما أنها تعين متخذي القرار في التنمية الحضرية بنظرة استراتيجية علمية وعملية. هدفت الدراسة إلى معرفة أثر التخطيط الاستراتيجي على التنمية الحضرية في المدن السودانية. اتبعت الدراسة المنهج التاريخي والمنهج الوصفي التحليلي. توصلت الدراسة لعدد من النتائج أهمها لم يعمل بالتخطيط الاستراتيجي في مجال التنمية الاقتصادية الحضرية من قبل الحكومات التي تعاقبت على الحكم، كما أن قلة الاهتمام بالتنمية الإقليمية والحيزية عند وضع المخططات الهيكلية والتفصيلية أدى لتركيز الخدمات والمرافق العامة بمدينة الخرطوم. أوصت الدراسة بضرورة وضع استراتيجية للتنمية الاقتصادية الحضرية بمدينة الخرطوم وربطها بقوانين وسياسات مع استراتيجية ولاية الخرطوم والولايات الطرفية تراعي العوامل والميز النسبية وتصب جميعها في التنمية الاقتصادية الحضرية، وتأهيل الكوادر وآليات متابعة التنفيذ، ووضع مؤشرات سودانية محلية لمراقبتها والتنسيق بين الجهات المختلفة وضرورة المشاركة الشعبية.

Abstract:

The paper addressed the impact of strategic planning on urban economic development in Khartoum (2000-2021). The problem of the study was that most Sudanese cities suffer from traditional mistakes in urban development, not using a scientific and practical approach to development, but rather managing crises in cities without working with a participatory, holistic and strategic view to solve economic decline and social disintegration and the conse-

quences thereof. The importance of the study stems from the fact that it deals with a topic that is considered one of the vital aspects in the prosperity, stability and progress of the city of Khartoum. It also helps decision-makers in urban development with a strategic, scientific and practical view. This study aimed to find out the impact of strategic planning on urban development in Sudanese cities. The study followed the historical method and the descriptive analytical method. The study reached a number of results, the most important of which was the lack of strategic planning in the field of urban economic development by the successive governments, and the lack of interest in regional and spatial development when developing structural and detailed plans led to the concentration of public services and utilities in the city of Khartoum. The study recommended the necessity of developing a strategy for urban economic development in Khartoum and linking it to laws and policies with the strategy of Khartoum State and the peripheral states that take into account the factors and comparative distinction and all contribute to urban economic development, qualification of cadres and implementation follow-up mechanisms, and the development of local Sudanese indicators to monitor them and coordinate between the various parties and the necessity of popular participation.

المقدمة:

يعتبر السودان من الدول حديثة التحضر، حيث إن معظم المدن في السودان نمت متخفية الموانع العمرانية لتمتد في كل الاتجاهات، حيث ازداد حجم سكانها بشكل مطرد، الأمر الذي أدى إلى ظهور بعض المشاكل العمرانية، ومع تضخم هذه المشاكل لم تستطع جهود التنمية العمرانية المتبعة بالمدن السودانية أن تؤتي ثمارها. من هنا نبعت الحاجة إلى وجود استراتيجية حديثة تعمل على تلبية احتياجات ومتطلبات هذه المناطق الحضرية في الحاضر والمستقبل، في إطار عالم متسارع ومتجدد الاحتياجات والسودان جزء من هذه المنظومة، حيث إن غياب التنمية الاقتصادية الحضرية في الولايات المجاورة أدى إلى زيادة سكانية متسارعة في ولاية الخرطوم، الأمر

الذي انعكس في تردّي مستوى تقديم الخدمات وقلت فرص العمل، وتوجه الولاية لإدارة الأزمات الحضرية في الوقت الراهن دون مراعاة الحاجة المستقبلية والعمل على توفيرها وفق استراتيجيات واضحة، يقوم مفهوم التخطيط الاستراتيجي العمراني على توفير السند من البنى التحتية والتنمية العمرانية لتحقيق المصالح الوطنية الاستراتيجية ويتضمن الاستغلال الأمثل للموارد الطبيعية والبيئة والحفاظ على كل منها واستيفاء الترتيبات العمرانية والحضرية المطلوبة لتحقيق الأمن والاستقرار بمفهومها الاستراتيجي، من هنا نبعت فكرة الحصول على حلول جديدة ومعالجة عيوب التخطيط التقليدي الذي ينظر إلى الحاجة الآنية والموارد المحدودة التي توجد داخل إطاره ويغفل الجانب الاستراتيجي والرؤية الشمولية التشاركية التي تشبك وتتشابك مع المفاهيم الحضرية والاستراتيجية بغية الوصول إلى تنمية حضرية متوازنة بمنظور استراتيجي.

مفهوم الاستراتيجية

الاستراتيجية أو "علم التخطيط بصفة عامة" هي مصطلح عسكري بالأساس وتعني الخطة الحربية، أو هي فن التخطيط للعمليات العسكرية قبل نشوب الحروب، وفي نفس الوقت فن إدارة تلك العمليات عقب نشوب الحروب.⁽¹⁾ يعتبر مصطلح الاستراتيجية من المصطلحات القديمة المأخوذ من الكلمة الإغريقية Strato وتعني الجيش أو الحشود العسكرية، ومن تلك الكلمة اشتقت اليونانية القديمة مصطلح Strategos وتعني فن إدارة وقيادة الحروب، كما تعني كلمة الاستراتيجية أصول القيادة التي لا عوجاج فيها، فهي تخطيط عالي المستوى، فمن ذلك الاستراتيجية العسكرية أو السياسية التي تضمن للإنسان تحقيق الأهداف من خلال استخدامه وسائل معينة، تعني الطريق أو الاستراتيجية، فهي علم وفن التخطيط والتكتيك والعمليات، ثم استعملت هذه الكلمة في المجالات المتعددة في شتى مناحي الحياة العامة.⁽²⁾

نشأة مفهوم الاستراتيجية:

تعتبر الحرب واحدة من الظواهر الحتمية في حياة الإنسان، وأكبت مسيرته على هذه الأرض وكانت معلماً بارزاً في تاريخه الطويل، فقد استحوذت كسواها من فروع المعرفة الإنسانية على اهتمام كثير من المفكرين الذين حاولوا الوصول إلى استنتاجات ومبادئ وقوانين عامة لهذه الظاهرة المعقدة من خلال الدراسة المقارنة لتجارب الحروب الإنسانية على مختلف أنماطها. وظهرت بواكير المؤلفات في هذا المجال قبل أكثر من ستة وعشرين قرناً على يد بعض العسكريين الصينيين تلتها مؤلفات أخرى لعسكريين ومفكرين اغريق ورومان وعرب وأوروبيين تناولت جميعها بعض المفاهيم والمبادئ الأساسية والتفصيلية للحرب، مما نتج عنه نشوء فرع جديد من فروع المعرفة الإنسانية اصطلح على تسميته (الفن العسكري) أو (الفن الحربي). كنتيجة حتمية للتطور والتوسع الهائل في مجال المعرفة العسكرية. قسم الفن العسكري إلى مستويات ثلاثة رئيسية هي:⁽³⁾

1. الاستراتيجية العليا أو الشاملة.
2. الاستراتيجية العسكرية.
3. التخطيط (التعبية).

تعريف الاستراتيجية:

يشير قاموس أوكسفورد إلى أن الاستراتيجية تعني الفن المستخدم في تعبئة وتحريك المعدات الحربية بما يمكن من السيطرة على الموقف والعدو بصورة شاملة.⁽⁴⁾

مفهوم التخطيط الاستراتيجي:

الاستراتيجية هي خطة شاملة تغطي المجالات المختلفة للدولة كما أنها خطة متكاملة تحقق أو تزيل الخلاف بين المجالات المختلفة للدولة وتحقق التكامل والدمج بينها.⁽⁵⁾ يعرف محمد حسين أبو صالح التخطيط الاستراتيجي بأنه: العملية التي يتم من خلالها وضع الاستراتيجية القومية ويتضمن التحليل الاستراتيجي واختيار التوجه الاستراتيجي للدولة والغايات الوطنية وتحديد البدائل، كما يتضمن تحقيق التكامل والتناسق للنشاط الوطني (السياسي، العلاقات الدولية، الاقتصادي، الاجتماعي الثقافي، الإعلامي والمعلوماتي، العسكري الأمني، التقني، العلمي) ويعني بإيجاد الترابط والتناسق بين الأهداف الاستراتيجية والمرحلية والأهداف قصيرة الأجل، وكذا الترابط والتناسق بين الأهداف والتشريعات والسياسات الاستراتيجية، وتحقيق التكامل بين كل منها بما يضمن أن كافة الجهود المتناثرة تصب تجاه تحقيق الغايات الوطنية المحددة بأفضل السبل والتكاليف وذلك في ظل الظروف والأوضاع محلياً وإقليمياً ودولياً ويعني بإيجاد الترابط والتناسق بين الأهداف الاستراتيجية والمرحلية والأهداف قصيرة الأجل، وكذا الترابط والتناسق بين الأهداف والتشريعات والسياسات الاستراتيجية، وتحقيق التكامل بين كل منها بما يضمن أن كافة الجهود المتناثرة تصب تجاه تحقيق الغايات الوطنية المحددة بأفضل السبل والتكاليف وذلك في ظل الظروف والأوضاع محلياً وإقليمياً ودولياً.⁽⁶⁾

التنمية العمرانية:

بغية الوصول إلى المفاهيم الأساسية يجب علينا إلقاء الضوء على بعض المفاهيم الأساسية منها:
أولاً: علاقة مصطلح النمو بالتنمية:

كلمتا النمو والتنمية كلمتان مترابطتان، وتستخدمان جنباً إلى جنب، ويختلف النمو عن التنمية ولكن كل منهما يعتمد على الآخر؛ لوصف النجاح في تحقيق الأهداف أو الوصول إليها، وهما من الدراسات المهمة في العصر الحديث، ويشكلان الجزء الأكبر في حياتنا.⁽⁷⁾

مفهوم النمو:

النمو هو تغير في الجوانب المادية، ويعتبر عملية خلوية تتوقف في مرحلة الاكتفاء منه، ويعد جزءاً من التنمية، وله نوعان كمي ونوعي ويمكن قياسه بدقة، ويوجد هناك نمو بشري، ونمو اقتصادي وأنواع أخرى من النمو، تقوم على المبدأ ذاته.⁽⁷⁾

1. النمو البشري: يستند النمو البشري على الأحداث البيولوجية التي تسببه لك، ومنها أن ينمو الجسد بشكل طبيعي في المراحل المبكرة من حياتك.
2. النمو الاقتصادي: هو مفهوم يعبر عن الزيادة في مستوى البلاد الحقيقي من الناتج القومي التي يمكن أن تسببها الزيادة في نوعية الموارد، أو الزيادة في كميته، والتحسينات التكنولوجية، أو يعبر عن الزيادة في قيمة السلع والخدمات التي تنتجها القطاعات المختلفة، ويمكن قياسه من خلال الزيادة في الناتج المحلي الإجمالي لدولة معينة.

مفهوم التنمية:

تشمل التنمية تطوير أشياء كثيرة، يظهر من قبل التحسين النوعي من الظروف، وتطوير عمليات معينة لتلبية الاحتياجات العامة.

أ. التنمية البشرية: هي نتاج للنمو النفسي والاجتماعي، وتأكيد العوامل البيئية والسلوكية للفرد، ويعبر عنها بمرحلة النضج.

ب. التنمية الاقتصادية: هي زيادة مستويات المعيشة، وتحسين احتياجات احترام الذات والتحرر من الظلم، وهو مفهوم معياري، يهدف إلى تطوير وتحسين الظروف المعيشية لزيادة النمو الاقتصادي، وتقاس من خلال معرفة معدلات القراءة والكتابة، والعوامل التي تؤثر على الإنتاجية في دولة ما.

وتعددت الآراء حول تعريف التنمية ويمكن إيرادها فيما يلي: ⁽⁸⁾

أ. الشكل المعقد من الإجراءات أو العمليات المتتالية والمستمرة التي يقوم بها الإنسان للتحكم بقدر ما في مضمون واتجاه وسرعة التغير والثقافي والحضاري في مجتمع من المجتمعات بهدف إشباع حاجاته.

ب. ظاهرة اجتماعية نشأت مع نشأة البشر المستقر فزاد الإنتاج وتطورت التجارة وظهرت الحضارات المختلفة على أرض المعمورة.

ت. نشاط مخطط يهدف إلى إحداث تغيرات في الفرد والجماعة والتنظيم من حيث المعلومات والخبرات ومن ناحية الأداء وطرق العمل، ومن ناحية الاتجاهات والسلوك مما يجعل الفرد والجماعة صالحين لشغل وظائفهما بكفاءة وإنتاجية عالية.

الفروقات الرئيسة بين النمو والتنمية: ⁽⁷⁾

1. النمو هو تغير في الجوانب المادية للفرد والمجتمع بينما التنمية هي تغيرات تدريجية للفرد والمجتمع.

2. النمو هو خلوي يتبعه تغير في الشكل، أما التنمية فهي تغير هيكلي وتقدم وظيفي.

3. النمو يتوقف في مرحلة معينة من الزمن، ولكن التنمية تبقى مستمرة.

4. النمو هو جزء من العملية التنموية، ولكن العكس غير صحيح.

5. توجد أنواع كمية ونوعية للنمو، ولكن التنمية لا يوجد لها.

6. يمكن الحصول على قياسات دقيقة للنمو، بينما لا يمكن قياس التنمية بدقة.

7. وعلى الرغم من أن النمو والتنمية هما عمليتان تؤثران في بعضهما البعض، لكن النمو قد يحدث على الرغم من عدم وجود التنمية، ومن الممكن أن تحدث تنمية دون وجود النمو، ولكن في بعض الأحيان يحتاج النمو إلى التنمية ليصل ويحقق أهدافه. النمو والتنمية، ليس

نفسيهما ولكن للوصول إليهما معاً، يجب تحديد الأهداف، وإنجازها بوجود الإرادة فهاتان العمليتان تسيران جنباً إلى جنب.

ويعرف سعد الدين إبراهيم التنمية بأنها ” انبثاق ونمو كل الإمكانيات والطاقات في كيان معين، بشكل كامل ومتوازن، سواء كان هذا الكيان فرداً أو جماعة أو مجتمعاً“، وبشكل أوضح يمكن تعريف التنمية بأنها محاولة استخدام كافة الموارد والإمكانات المتاحة والممكنة من إمكانيات طبيعية واقتصادية وبشرية بصورة تستهدف الرفاهية للإنسان في المحيط الحيوي الذي يعيش فيه. كما تعبر التنمية عن مرحلة تغيير أو إصلاح في: (9)

1. النمو الاقتصادي.
2. العدالة في التوزيع.
3. التغيير الاجتماعي والاقتصادي.
4. التحول الاجتماعي.
5. الحضرة. (Civilization)

عناصر التنمية الرئيسية: (9)

- أ. التنمية الاقتصادية: وتشمل الاستثمارات واستغلال الموارد.
- ب. التنمية الاجتماعية: في مجالات التعليم - الصحة - الترفيه - الثقافة.
- ت. التنمية العمرانية: وتشمل مواقع الاستثمارات والخدمات.

أساليب تقييم نجاح التنمية العمرانية:

للتقييم عدة أوجه تنتج عن الغرض الذي يتم من أجله:

- أ. فهو إما يقيس فعالية برنامج جاري في تحقيق أهدافه المرحلية أو النهائية.
- ب. أو يحكم على مشروع أو شيء بأنه جيد أو رديء.
- ت. أو يهدف إلى تحسين الأداء في العمليات الجارية بالمشروع.

وتتحدد معايير التقييم لكل مشروع بناء على طبيعته وأهدافه المختلفة، إلا أنه بالنسبة للمشروعات العمرانية لا تخرج تلك المعايير عن ست مجموعات هي: المعايير الاقتصادية والمعايير العمرانية والمعايير البيئية والمعايير الاجتماعية ومعايير البنية الأساسية والمعايير الخاصة بالنقل. وكما سبق القول قد تختلف طبيعة تلك المعايير من مشروع لآخر طبقاً لنوعيته وإن كانت تحتفظ بنفس المسميات.

المعايير الاقتصادية وتشمل: (10)

1. التنوع في فرص العمل المتوفرة.
2. تعظيم استغلال الثروات.

المعايير الاجتماعية وتشمل

1. خفض الضغوط الاجتماعية والسياسية على المستوطنين الجدد.
2. تعظيم إمكانات الخدمات الصحية والاجتماعية.
3. تعظيم فرص عمل المرأة.
4. رفع مستوى الصحة العامة.

المعايير العمرانية وتشمل:

1. اتزان الانتشار العمراني بالإقليم.
2. تناسب المساكن من حيث المساحة والتصميم وتوافر البيئة مع احتياجات السكان.
3. الربط بين التجمعات العمرانية وبعضها البعض.
4. سهولة الوصول من المساكن إلى أماكن العمل والخدمات.

المعايير البيئية وتشمل:

1. المحافظة على النظام البيئي للإقليم.
2. تحقيق الحد الأدنى من تلوث الهواء والمياه وتكلفة معالجة الفضلات.
3. التقليل من سلبيات التنمية العمرانية.

المعايير الخاصة بالبنية الأساسية، وتشمل:

1. خفض التكلفة الإجمالية للطاقة المستخدمة في تحقيق مستوى معين من الأداء.
2. تعظيم استخدام الطاقات الجديدة والمتجددة.
3. تحقيق شبكة للاتصالات بالإقليم على المستوى القومي والعالمي.

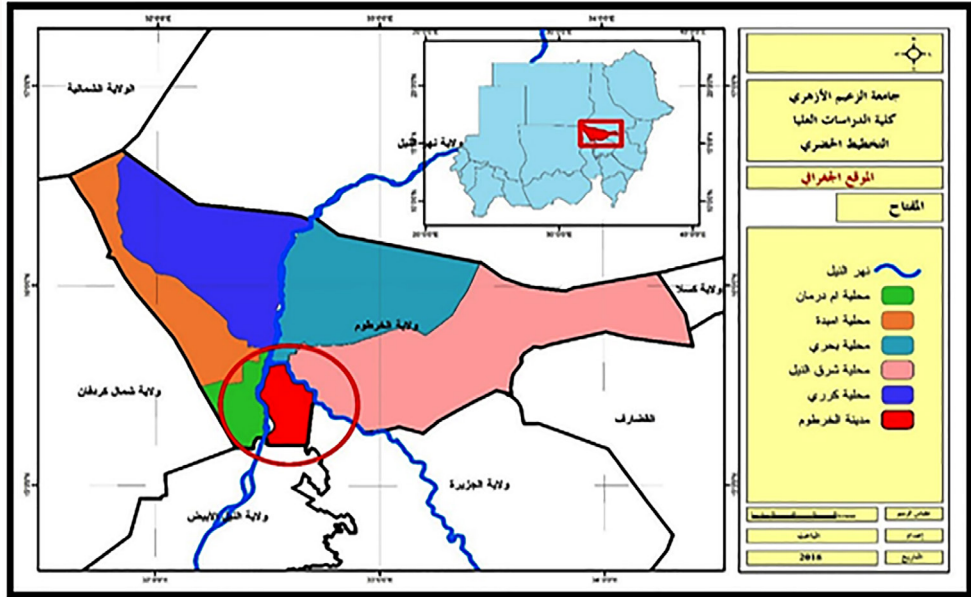
المعايير الخاصة بالنقل، وتشمل:

1. تحقيق الحد الأدنى من الحركة للناس والمنتجات وبالتالي الطلب على النقل.
 2. تحقيق سهولة الحركة للسكان بين التجمعات العمرانية داخل الإقليم.
 3. تقليل الطول الإجمالي لخطوط النقل داخل الإقليم.
- وبمقارنة كل معيار من المعايير السابقة بالمعدلات القياسية يمكن تقييم مستوى أداء المشروع، كما يمكن استخدام التقييم في مقارنة بدائل للحلول، حيث يتم تقييم كل بديل طبقاً للمعايير الموضوعية، ويفضل البديل الذي يقترب أكثر من تلك المعايير.

حدود منطقة الدراسة:

تقع مدينة الخرطوم في الجزء الشمالي الشرقي من قلب البلاد، عند نقطة التقاء النيل الأبيض بالنيل الأزرق (المقرن)، ليشكلا معاً نهر النيل (خريطة (1))، وتضم كل من محليتي الخرطوم وجبل أولياء عدد من الوحدات الإدارية، تبلغ مساحتها حوالي (794) كيلومتراً مربعاً عند نقطة التقاء النيلين الأبيض والأزرق، تقع مدينة الخرطوم على ارتفاع 382 متراً (1,253,28 قدم) فوق سطح البحر فوق أرض سهلية مستوية السطح مع انحدار طفيف نحو مجرى نهر.

خريطة (1) الموقع الجغرافي لمدينة الخرطوم



المصدر: وزارة الصحة بتصرف من الباحثين، 2018م

الخصائص السكانية:

شهدت الخرطوم الكبرى منذ الاستقلال 1956م نموّاً سكانياً متزايداً، حيث بلغ العدد إبان الاستقلال 245.736 نسمة، ويتفاوت عدد سكان كل مدينة من مدن الخرطوم الكبرى، حيث تصدرت أمدرمان القائمة بـ 113.551 نسمة ونسبة 37.9%، وجاءت الخرطوم بحري أخيرة، حيث بلغ عدد سكانها 39.082 نسمة، بنسبة 15.9%، وشهد عام 1983 م ازدياد عدد سكان الخرطوم الذي كان 2.824.937 نسمة من إجمالي سكان ولاية الخرطوم البالغ عددهم 3.521.145 نسمة. وقد بلغت النسبة المئوية 110.7%، في حين بلغت النسبة المئوية للزيادة السكانية خلال الفترة 1983 لسكان الخرطوم لإجمالي سكان الولاية 8.4% الخرطوم الكبرى قتل القلب النابض للسودان خلال المائة سنة الماضية، فقد تضاعف سكانها 140 مرة خلال الفترة من 1905 م إلى 2003 م وذلك من 150 ألف نسمة في عام 1905 م إلى 7 ملايين نسمة في عام 2000م تجد أن أعداد السكان حققت قفزات كبيرة خلال العقدين 1993 — 2000م. من بيانات السكان حيث بلغت الزيادة أكثر

من 50%، ويزيد سكان الخرطوم نتيجة للزيادة الطبيعية، إضافة إلى الزيادة الناتجة عن الهجرة الداخلية والخارجية. بلغ عدد سكان ولاية الخرطوم لتعداد عام 2008م حوالي 7.201.659، كما موضح بالجدول (1):

الكثافة السكانية الإجمالية لمحييتي الخرطوم وجبل أولياء:
بلغ عدد سكان مدينة الخرطوم الكبرى 2,014,576 نسمة والكثافة السكانية 30.91 نسمة/كلم2:

(1) محلية الخرطوم 815230

عدد سكان محلية الخرطوم حوالي 815230 نسمة، وتبلغ مساحة المحلية حوالي 179 كلم2، وتبلغ الكثافة السكانية للمحلية 4554 نسمة/كلم2.

(2) محلية جبل أولياء 1.199.346

يبلغ عدد سكان محلية جبل أولياء حوالي 1.199.346 نسمة، وتبلغ مساحة المحلية حوالي 615 كلم2، والكثافة السكانية تساوي 1959 نسمة/ كلم2 وهي اقل من الكثافة السكانية لمدينة الخرطوم. يتباين التوزيع الجغرافي للسكان في وحدات الخرطوم الإدارية المختلفة، ففي حين أن هناك بعض المناطق تصل فيها الكثافة السكانية إلى (100159) نسمة/ كلم2 مثل وحدة الخرطوم شرق، إلا أن هناك مناطق أخرى أقل كثافة حيث تصل إلى (512) نسمة / كلم2 مثل منطقة جبل أولياء ويعزى ذلك لنشاط المنطقة التجاري والإداري، بالنسبة إلى الكثافة السكانية حسب الوحدات الإدارية. إن دراسة النمو السكاني لمحييات الخرطوم يعد مؤشرًا بشكل أو بآخر لمدى تأثير شبكة النقل في الضواحي، فمعدلات النمو السكاني التي شهدتها مناطق الأطراف أو الهوامش فاقت معدلات النمو وسط المدينة) نظرًا لانخفاض قدرتها على استيعاب أعداد إضافية من السكان ووصولها إلى حد الإشباع في حجمها السكاني)، جدول (3) و (4). (11)

النمو السكاني:

(1) نمو طبيعي:

أ. المواليد: وفقاً لتعداد السكان الخامس للعام 2008 فقد بلغ معدل المواليد الخام حوالي 24.3 مولود لكل ألف من السكان ومعدل الخصوبة العام فقد بلغ معدل الخصوبة الكلي 94.3 مولود، أما معدل الخصوبة الكلي فقد بلغ 4.3 مقارنة بـ 5.6 وفقاً للتعداد السكاني للعام 1993م.
ب. الوفيات: اوضحت نتائج التعداد الخامس في العام 2008 انخفاض مستوى الوفيات حيث بلغ معدل الوفيات الخام 16.4 وفاة لكل 1000 من السكان وبلغ معدل وفيات الرضع 75 وفاة لكل 1000 مولود حي مقارنة بـ 92 وفاة لكل 1000 مولود حي وفقاً لتعداد العام 1993 بينما بلغ معدل وفيات الأطفال 91. وفاة لكل 1000 مولود حي مقارنة بـ 131 وفاة لكل 1000 مولود حي وفقاً لتعداد العام 1993، أما متوسط سنوات الحياة المتوقعة عند الميلاد لسكان ولاية الخرطوم بلغ 62 سنة مقارنة بـ 57 سنة وفقاً لتعداد العام 1993.

2) نمو غير طبيعي: الهجرة:

تأتي ولاية الخرطوم في المرتبة الأولى من بين ولايات السودان التي تتأثر بالهجرة حيث تستقبل أكبر نسبة من حجم الهجرة في السودان، وفقاً لتعداد السكان الخامس 2008 فإن حجم الهجرة الداخلة لولاية الخرطوم حوالي 1.952.646 الذكور منهم حوالي 1084.840 والإناث حوالي 867.813. (12)

نمط المعيشة:

يتوزع سكان الولاية بين نمطين مختلفين للمعيشة إذ بلغ عدد سكان الحضر 4.272.728 نسمة بنسبة 81% وسكان الريف 1.001.593 نسمة بنسبة 19%، جدول (3).
التمدد السكاني بمدينة الخرطوم:

اكتشفت آثار لمجموعات بشرية في أجزاء مختلفة من الخرطوم ترجع لفترة ما قبل التاريخ الميلادي لكن أهم المستوطنات البشرية التي غمت على ضفاف النيل حتى 540 م هي مدينة سوبا عاصمة دولة علوة المسيحية (150 - 540م) حتى عام 1504م التي كانت من أهم المراكز الدينية والإدارية والتجارية، حيث شهدت تطوراً عمرانياً تمثل في وجود عدد كبير من المباني المهمة التي بنيت بالطوب الأحمر، بعد سقوط دولة علوة ودمار سوبا على يد الفونج، حيث أسس الفونج عاصمتهم في سنار عام 1504 م. (13)

وقد أعيد إعمار الخرطوم بواسطة مهاجرين من المحس إلى جزيرة توني أولاً، والتي تعتبر النواة الحقيقية للخرطوم الكبرى، فقد خرج الشيخ أرباب العقائد عام 1691م من جزيرة توني التي اشتهر بها، وعبر النهر إلى الخرطوم لينشئ بها أول قرية مأهولة، وفعل مثله الشيخ خوجلي الذي استقر في الخرطوم بحري وأنشأ بها حلة خوجلي الباقية باسمه إلى اليوم، كما خرج الشيخ حمد ود أم مريوم إلى أمدرمان، لكنه رحل عنها إلى الخرطوم بحري وأنشأ بها حلة حمد المعروفة باسمه حتى اليوم، ثم اندمجت القرى الثلاث تدريجياً كمراكز دينية وتجارية وإدارية. (13)
اختيرت الخرطوم في فترة الحكم التركي المصري عاصمة للبلاد عام 1821 ففي هذه الفترة ظهر أول مخطط سكني لمدينة الخرطوم عام (1821 - 1885 م) وقد قسمت العاصمة إلى أقسام رئيسية، وتشمل منطقة الحكمدارية ومنطقة المسجد (الجامع الكبير) والكنيسة ومنطقة السوق. وأصبحت الخرطوم أهم المراكز الدينية والإدارية والتجارية وبلغ عدد سكانها في العام 1840م حوالي 30.000 ألف نسمة. (14)

بعد سقوط الخرطوم في يد المهدي (1885م) تحولت العاصمة من الخرطوم إلى أمدرمان حيث أخذت تنمو من النواحي الإدارية والتجارية والمعمارية ممثلة نموذجاً للمدينة الإسلامية، فازداد عدد سكانها نتيجة لهجرات سكان غرب السودان، حتى ارتفع عدد سكانها إلى 150.000 نسمة. (14)

عادت الخرطوم مرة أخرى عاصمة للبلاد في فترة الحكم الثنائي (1898 / 1956 م)، فوضع اللورد كشنر خطة لتعميرها وتطويرها تعتبر أول خطة عمرانية توضع لمدينة سودانية، حيث

قسمت المدينة إلى قطاعات ربط بينها بالطرق. أما الخرطوم بحري فقد انتعشت مع وصول خط السكة الحديد، ثم أنشئت منطقة للصناعات الصغيرة، بعد إنشاء كوبري النيل الأزرق عام 1909م وكوبري النيل الأبيض عام 1928م أصبحت الخرطوم بحري وأم درمان مرتبطتين بالخرطوم. (15)

بعد الاستقلال ازدادت الهجرات نحو الخرطوم الكبرى مما جعل الريفيين يتطلعون إلى حياة أفضل في الحضر، خاصة أن اتجاه الحكومة الوطنية الأولى كان نحو التصنيع. ونسبة لضعف البنيات التحتية تركز التصنيع في المدن الكبرى، وعلى رأسها الخرطوم الكبرى، حيث أصبحت الأولى في مجال الصناعة والتجارة والنقل، بالإضافة إلى تركيز السلطة الإدارية وتقديم الخدمات نسبياً بها، حتى أصبحت الخرطوم الكبرى المدينة المهيمنة بلا منازع.

التخطيط الحضري والخطط الموجهة:

بذلت السلطات الوطنية مجهودات مقدرة من أجل التخطيط الحضري والعمراني في ثلاثة اتجاهات رئيسية تناولت التخطيط العام للخرطوم الكبرى.

خطة دو كسيادس 1959م:

في إطار جهود السلطات لترشيد أسلوب استخدام الأراضي المتنامي في العاصمة القومية لجأت سلطات التخطيط إلى اعتماد الخطط الموجهة، وفي عام 1959م عهدت حكومة السودان لشركة دو كسيادس الهندسية، وهي بيت خبرة يوناني، لإعداد خريطة موجهة للخرطوم الكبرى. قامت شركة دو كسيادس بتطبيق بعض أفكارها عن المدينة الدينامية في وضع المخطط الجديد للعاصمة السودانية، لذلك كانت هذه الخطة أول خطة تضع محاور للنمو العمراني للمدينة على طول النيل الأبيض والأزرق ونهر النيل، وذلك لاستيعاب الزيادة السكانية المتوقعة عند نهاية عمر الخطة في عام 1975م والتي قدرت بحوالي 735 ألف نسمة بنيت هذه الخطة على عدد من الأهداف الأساسية أهمها: (15)

- التركيز على المحافظة على الشخصية المتفردة لكل مدينة من المدن الثلاث، وربطها بوسائل الاتصال، وإنشاء العديد من الكباري الإضافية، لتحقيق الربط بين المدن الثلاث.
- ربط الطرق الإقليمية مع شبكة الطرق الداخلية للمدن الثلاث.
- تحويل مطار الخرطوم لموقع آخر.
- تحويل محطة السكة الحديد وإعادة مد خطوط السكة الحديد.
- تحويل منطقة مرسى النقل النهري بالخرطوم بحري.
- تنمية وتطوير مراكز المدن الثلاث في اتجاه النيل.

وقد تم تحديد الشكل العام لنمو المدن الثلاث على شكل مستطيل منتظم، وذلك في إطار التخطيط الشبكي الذي أثبت مرونة كبيرة في إضافة مناطق جديدة وفي مد الشبكات والخدمات الضرورية الأخرى. أما المرحلة الثانية فيأخذ النمو المقترح شكلاً آخر، هو شكل امتداد خطي نحو المنطقة الجنوبية لمدينة الخرطوم المحصورة بين النيلين الأبيض والأزرق ولعدم وجود معوقات طبيعية تحد من النمو في هذا الاتجاه، خطة دو كسيادس (1959م) ركزت على مناطق العمل

ومساحات للإدارات والمؤسسات الحكومية، واستخدام سكن ومناطق ترفيهية. أهم ما يميز هذا المخطط هو احتوائه على موجّهات للنمو العمراني للمدينة، وكذلك احتفاظ كل مدينة بخصوصيتها، مع التّوحد والترابط والتكامل الوظيفي.

إلا أن أهم الجوانب السالبة لهذا المخطط أنه نظري أكثر من كونه عملياً، كما أن تقديرات زيادة السكان كانت متواضعة، لذلك تعقدت الأمور عند التخطيط التفصيلي وعند التنفيذ، فالتعدي السريع على الأراضي بغرض السكن من قبل المواطنين خلال الفترة التي سبقت عمليات التخطيط عاق التنفيذ، مما أدى إلى ضعف الثقة في ملاءمة الخطة للظروف المتغيرة بالعاصمة القومية. (15)

خطة مفت 1976م:

تم إعداد هذه الخطة بواسطة بيت الخبرة الإيطالي، وذلك لفترة الخمسة عشر عاماً التالية حتى عام 1990 م، لقد تم النظر في إمكانية تطور مدينة الخرطوم في هذه الخطة على المستوى الإقليمي الواسع، واضعين في الاعتبار الوضع الوظيفي أو الإداري والخدمي الخاص بها كعاصمة للبلاد.

قسمت الأهداف العامة لهذا المخطط إلى أهداف بعيدة المدى وأخرى قصيرة المدى، حيث كانت الأهداف بعيدة المدى تتمثل في الآتي:

- أ. زيادة نسبة مستوى العمالة الموظفة مع الهدف النهائي لتوظيف القوى العاملة.
 - ب. تشجيع قطاعي الزراعة والصناعة لتحقيق التوازن في الميزان التجاري عبر زيادة التصدير وخفض الاستيراد وتشجيع الصناعة المحلية.
 - ج. توسيع الخدمات الاجتماعية وتحسينها، وزيادة نسبة المستفيدين منها.
 - د. تقوية اقتصاديات المنطقة عبر تشجيع النمو العمراني على طول الطرق العابرة.
- جاءت هذه الخطة عبر مقترحاتها لتؤكد مقترحات الخطة السابقة "دوكسيادس 1959م" وقد جاءت كالآتي:

1. ترحيل مطار الخرطوم إلى الموقع المقترح شمال شرق الحاج يوسف والاستفادة من موقعه الحالي لصالح المركز الرئيسي للمدينة.
 2. ترحيل محطة السكة الحديد والنقل النهري ببكري وجامعة الخرطوم للموقع المقترح بسوبا، والاستفادة من هذه المواقع لصالح مركز المدينة.
 3. اعتماد نمو المركز للمدن الثلاث في اتجاه النيل.
 4. إعداد مشاريع تجميلية للبيئة الحضرية عبر تحسين الواجهة المائية للعاصمة القومية.
- تم اختيار مواقع جديدة للخطة الإسكانية خارج نطاقها، مثلاً في (1977م) تم إعداد خطط إسكانية مع بعض التعديلات في الخطة تم تنفيذها بمعدل مساحات أصغر من المساحات التي وزعت بموجب خطة دوكسيادس المقترحة كما تشير خريطة مفت. (16)

الخطة الهيكلية دو كسيادس وعبد المنعم، 1990 - 2000م:

الخطة الهيكلية خطة متوسطة المدى لعدد من السنوات، ومرنة قابلة للحذف والتعديل خلال سنوات وضعها. أعدت هذه الخطة بالتعاون بين مؤسسة دو كسيادس العالمية وشركة عبد المنعم مصطفى في عام 1990 م، خرجت بمخطط تنموي مصاحب ببرامج عمل عاجلة للخرطوم الكبرى، وذلك لإعادة تأهيل المدينة بعد كوارث الأمطار والسيول التي ضربتها في أغسطس 1988م. وقد جاءت الأهداف العامة كما يلي:

1. تحديد السياسات والخطط الاستراتيجية لتوجيه النمو العمراني.
 2. تحديد مراحل النمو وفقاً لإمكانات موارد البلاد.
 3. إعادة توزيع تمرکز الكثافة السكانية.
 4. دراسة شبكات المرافق العامة والخدمات الاجتماعية والنقل العام، ووضع الحلول اللازمة لتقويتها وتنميتها، وتحديد المشاريع التي يتم تنفيذها حسب مراحل النمو المقترحة.
 5. دراسة الكيفية التي يتم بموجبها تنفيذ الخطة الهيكلية لضمان التنفيذ.
- تبنّت هذه الخطة فكرة توجيه نمو المدينة من جهة الجنوب على طول محاور المواصلات، مع تنمية المواصلات الحضرية عن طريق إدخال نظام الترام من جديد. كما اقترح المخطط إعادة هيكلة النظام الحضري بالمدينة، وذلك عبر تقسيمها إلى مناطق إدارية متجانسة ومكتفية ذاتياً، مع وجود تدرج هرمي للخدمات ومراكز العمل، وذلك لتقليل الرحلات اليومية للسكان إلى مناطق العمل والخدمات، وهذا التقسيم يقوم على مبدأ العدالة في توزيع الخدمات. (15)
- المخطط الهيكل لولاية الخرطوم (2008 - 2033م):

تهدف الخريطة الهيكلية لولاية الخرطوم إلى صياغة استراتيجية حيزية للتنمية الإقليمية والحضرية للولاية وللعاصمة القومية، ووضع التحسينات والضوابط اللازمة للوضع الحالي للولاية من النواحي الاقتصادية والاجتماعية والوظيفية والبيئية، بالإضافة إلى التنمية المستقبلية الإقليمية والحضرية. وتغطي كل جوانب استعمالات الأرض، الخدمات، الإسكان، البيئة، الحكم والشؤون المالية، بالإضافة إلى قضايا الأقاليم المتاخمة في الولايات المجاورة.

أسس الخريطة الهيكلية:

- تمديد المنطقة الحضرية على نطاق الطريق الدائري الخارجي، وذلك بتوفير تسع مدن جديدة متكاملة من حيث الخدمات، وفرص العمل، والبنيات التحتية، والسكن الصحي للملائم لجميع الشرائح الاجتماعية، وربطها بشبكة نقل طرق حضرية وإقليمية.
- المدن المحورية، وعددها تسع: لاستيعاب أكثر من 6 ملايين نسمة خلال الخمسة والعشرين عاماً المقبلة.
- تكون منطقة توتي المركز الحضري للثقافة والسياحة والنواحي الترفيهية، والواجهات المائية في الخرطوم وأم درمان وبحري.

- إعادة توزيع ونشر الوزارات والمرافق الحكومية. وإعادة تطوير الموقع الحالي للمطار كم منطقة مركزية ذات وظائف حضرية ممثلة في زيادة ارتفاعات المباني وإنشاء حدائق.
- إنشاء 1200 مشروع يتم تنفيذها خلال خمس مراحل، كل مرحلة تمتد خمس سنوات، تكتمل خلال الخمس والعشرين سنة القادمة.
- مراعاة العلاقة الاستراتيجية بين ولاية الخرطوم وولايات الجوار، مما يقتضي التنسيق الدقيق والمتصل بينها وبين الولايات المجاورة في إطار هيكلي متكامل في نواحيه العمرانية والبشرية والبيئية والاقتصادية والبنيات التحتية. (الخطة الهيكلية لولاية الخرطوم، 2011م)

تحليل الدراسة:

تم استخدام الاستبيان لدراسة الظاهرة كما هي في الواقع ووصفها وصفاً دقيقاً للتعرف على أثر التخطيط الاستراتيجي على التنمية الاقتصادية الحضرية بمدينة الخرطوم، شملت الاستبانة عدداً من المحاور التي يراد قياسها من أفراد مجتمع الدراسة (والذي يتكون من طلاب الدراسات العليا في المجال الاستراتيجي والاقتصادي والعمراني والموظفين الحكوميين فوق الدرجة الخامسة باعتبارهم صناع ومتخذي قرار في المؤسسات الحكومية (المجلس الأعلى للاستراتيجية و هيئة المعلومات والحكومة الذكية والمخطط الهيكلي والمرصد الحضري ومحليتي الخرطوم وجبل أولياء))، والتي مثلت (93) استبانة من عينة الدراسة، حيث تم تحويل المتغيرات الاسمية (موافق بشدة، موافق، محايد، غير موافق، غير موافق بشدة) إلى متغيرات كمية (1، 2، 3، 4، 5) على الترتيب وتم تفريغ البيانات في الجداول الآتية، خضعت للتحليل الإحصائي باستخدام برنامج التحليل الإحصائي (SPSS).

البيانات الشخصية:

يتضح من الجدول (6) ان غالبية أفراد العينة كانوا إناثاً بنسبة بلغت (62.37%) يليهم الذكور بنسبة (37.63%) وذلك لأنها الشريحة الأكبر في معدلات النمو السكاني في السودان. يتضح من الجدول (7) أن غالبية أفراد العينة كانوا من الفئة العمرية (31 وأقل من 40 سنة) وذلك لوجود هذه الفترة العمرية في طلاب الدراسات العليا في مجال التخطيط الاستراتيجي، بنسبة بلغت (40.86%) يليهم الأفراد من الفئة العمرية (20 وأقل من 30 سنة) بنسبة بلغت (37.63%) ثم الأفراد من الفئة (41 إلى 50) بنسبة بلغت (15.05%) وأخيراً الأفراد من ذوي الفئة العمرية (51 وأقل من 60 سنة). بنسبة بلغت (6.45%). يتضح من الجدول (8) أن غالبية أفراد العينة كان مؤهلهم (ماجستير) بنسبة بلغت (49.64%)، وذلك لتكيز الباحثين على شريحة طلاب الدراسات العليا، يليهم الأفراد من ذوي المؤهل (بكالوريوس) بنسبة بلغت (22.58%) ثم الأفراد من ذوي المؤهل (دكتوراه) بنسبة بلغت (20.43%) ثم حاملي درجة (الدبلوم العالي) بنسبة (5.38%) وأخيراً الأفراد الذين لديهم مؤهل (دبلوم) بنسبة (2.15%). يتضح من الجدول (9) أن غالبية أفراد العينة كانت خبراتهم تتراوح بين 6-10 بنسبة بلغت

(45.16 %) وذلك للاهتمام مؤخراً بالتخطيط الاستراتيجي واهماله في العقود السابقة، يليهم الأفراد ذوي الخبرة أقل من 5 سنوات بنسبة (31.18%) ثم الأفراد (11-15) بنسبة (10.75%) ثم (أكثر من 21 سنة) بنسبة (8.60%) ثم الأفراد ذوي الخبرة (16-20) والافراد بنسبة (4.30%).
يتضح من الجدول (10) أن الغالبية العظمى لأفراد العينة كان تخصصهم (استراتيجي) بنسبة 43.01% وهم أصحاب الخبرات والتخصصية من طلاب الدراسات العليا في المجال، ثم إداري بنسبة 23.66% ثم تخطيط عمراني 15.5 % ثم اقتصادي بنسبة 10.75% وأخيراً اجتماعي بنسبة 7.53%.

تحليل البيانات واختبار فرضيات الدراسة:

للإجابة على تساؤلات الدراسة والتحقق من فرضياتها سيتم حساب الوسط الحسابي لكل عبارة من عبارات الاستبيان والتي تبين آراء عينة الدراسة، حيث تم إعطاء الدرجة (1) كوزن لكل إجابة "موافق بشدة"، والدرجة (2) كوزن لكل إجابة "موافق"، والدرجة (3) كوزن لكل إجابة "محايد"، والدرجة (4) كوزن لكل إجابة "لا أوافق"، والدرجة (5) كوزن لكل إجابة "لا أوافق بشدة". إن كل ما سبق ذكره وحسب متطلبات التحليل الإحصائي هو تحويل المتغيرات الاسمية إلى متغيرات كمية، وبعد ذلك سيتم استخدام اختبار مربع كاي لمعرفة دلالة الفروق في إجابات أفراد عينة الدراسة على عبارات كل فرضية.

الفرضية الرئيسية:

تنص الفرضية الرئيسية للدراسة على أن هنالك علاقة بين التخطيط الاستراتيجي والتنمية الاقتصادية الحضرية، هدف وضع هذه الفرضية إلى بيان علاقة بين التخطيط الاستراتيجي والتنمية الاقتصادية الحضرية وللتحقق من صحة هذه الفرضية، ينبغي معرفة اتجاه آراء عينة الدراسة بخصوص كل عبارة من العبارات المتعلقة بالفرضية الأولى، ويتم حساب الوسط الحسابي لإجابات أفراد عينة الدراسة على كل عبارة ومن ثم على العبارات مجتمعة، والوسط الحسابي هو أحد مقاييس النزعة المركزية الذي يستخدم لوصف الظاهرة والذي يمثل الإجابة التي تتوسط جميع الإجابات وذلك كما في الجدول (11):

يتبين من الجدول ما يلي(11):

1. بلغت قيمة الوسط الحسابي لإجابات أفراد عينة الدراسة على العبارة الأولى (1.57)، وتعني هذه القيمة أن غالبية أفراد العينة (موافقون بشدة) على نص العبارة "التخطيط الاستراتيجي يعمل على رفع مستوى دخل الفرد وفتح فرص عمل"
2. بلغت قيمة الوسط الحسابي لإجابات أفراد عينة الدراسة على العبارة الثانية (1.49)، وتعني هذه القيمة أن غالبية أفراد العينة (موافقون بشدة) على نص العبارة "التخطيط الاستراتيجي يساهم في الاستغلال الأمثل للثروات الطبيعية والمائية والسياحية وتوزيع الموارد بصورة متوازنة"
3. بلغت قيمة الوسط الحسابي لإجابات أفراد عينة الدراسة على العبارة الثالثة (1.4)، وتعني هذه القيمة أن غالبية أفراد العينة (موافقون بشدة) على نص العبارة "التخطيط الاستراتيجي يعمل على توفير الخدمات الأساسية والبنى التحتية لقيام المشاريع الاقتصادية المستقبلية"

4. بلغت قيمة الوسط الحسابي لإجابات أفراد عينة الدراسة على العبارة الرابعة (1.54)، وتعني هذه القيمة أن غالبية أفراد العينة (موافقون بشدة) على نص العبارة " التخطيط الاستراتيجي يساعد في جذب الفرص الاقتصادية والسياحة لخلق فرص استثمارية جديدة"
 5. بلغت قيمة الوسط الحسابي لإجابات أفراد عينة الدراسة على العبارة الخامسة (2.01)، وتعني هذه القيمة أن غالبية أفراد العينة (موافقون) على نص العبارة " التخطيط الاستراتيجي يعمل على تقوية العلاقة بين صغار المنتجين وكبار المنتجين في المناطق الحضرية "
 6. بلغت قيمة الوسط الحسابي لإجابات أفراد عينة الدراسة على العبارة السادسة (1.81)، وتعني هذه القيمة أن غالبية أفراد العينة (موافقون) على نص العبارة " تركيز مشاريع التخطيط الاستراتيجي في ولاية الخرطوم يحفز النزوح إليها من الولايات الطرفية "
- أن النتائج أعلاه لا تعني أن جميع أفراد عينة الدراسة متفقون على ذلك، حيث إن هناك أفراداً غير محددين أو غير موافقين على ذلك، ولاختبار وجود فروق ذات دلالة إحصائية بين أعداد الموافقين وغير محددين وغير الموافقين للنتائج أعلاه تم استخدام اختبار مربع كاي لدلالة الفروق بين الإجابات على كل عبارة من عبارات الفرضية الأولى.
- مما تقدم لاحظنا تحقق فرضية الدراسة الرئيسية لكل عبارة من العبارات المتعلقة بها، وللتحقق من صحة الفرضية بصورة إجمالية لجميع العبارات، وحيث إن عبارات الفرضية الرئيسية عددها 6 عبارات وعلى كل منها هناك (93) إجابةً هذا يعني أن عدد الإجابات الكلية لأفراد عينة الدراسة على جميع عبارات الفرضية الرئيسية ستكون (558) إجابةً. ويمكن تلخيص إجابات أفراد عينة الدراسة على العبارات الخاصة بالفرضية الرئيسية بالجدول (11) رقم وشكل (1):
- يتبين من الجدول (12) أن عينة الدراسة تضمنت على (281) إجابةً ونسبة (52.36%) موافقة بشدة على ما جاء بجميع عبارات الفرضية الرئيسية بحيث تثبت هذه الفرضية، و (216) إجابةً ونسبة (38.71%) موافقة، و (46) إجابةً ونسبة (8.24 %) محايدة، و (13) إجابةً ونسبة (2.33 %) غير موافقة و(2) إجابةً ونسبة (0.36 %) غير موافقة بشدة على ذلك، وقد بلغت قيمة مربع كاي المحسوبة لدلالة الفروق بين أعداد الإجابات الموافقة وغير المحددة وغير الموافقة على ما جاء بجميع عبارات الفرضية الرئيسية (588)، بدرجة حرية (4)، وبلغت قيمة الخطأ المسموح في العينة (0.00) وهي أقل من مستوى المعنوية (0.05) -واعتماداً على ما ورد فإن ذلك يشير إلى وجود فروق ذات دلالة إحصائية وعند مستوى دلالة (5%) بين الإجابات ولصالح الإجابات الموافقة بشدة على ما جاء بجميع عبارات الفرضية الأولى.

عبارات الفرضية الرئيسية:

- نص الفرضية: أن هنالك علاقة بين التخطيط الاستراتيجي والتنمية الاقتصادية الحضرية تعمل على تحقيق البنود التالية:
- أ. التخطيط الاستراتيجي يعمل على رفع مستوى دخل الفرد وفتح فرص عمل.

يتضح من الشكل (1) والجدول (7) أن عينة الدراسة تضمنت على (46) إجابةً ونسبة (49.46%) موافقة بشدة و (43) إجابةً ونسبة (46.24%) موافقة بحيث تثبت هذه الفرضية، و (2) إجابةً ونسبة (2.15%) محايدة، و (2) إجابةً ونسبة (2.15%) غير موافقة و (0) إجابةً ونسبة (0%) غير موافقة بشدة على العبارة.

ب. تنص العبارة الثانية " التخطيط الاستراتيجي يساهم في الاستغلال الأمثل للثروات الطبيعية والمائية والسياحية وتوزيع الموارد بصورة متوازنة "

يتبين من الشكل (2) والجدول (8) أن عينة الدراسة تضمنت على (53) إجابةً ونسبة (56.99%) موافقة بشدة بحيث تثبت هذه الفرضية، و (35) إجابةً ونسبة (37.63%) موافقة، و (4) إجابةً ونسبة (4.3%) محايدة، و (1) إجابةً ونسبة (1.08%) غير موافقة و (0) إجابةً ونسبة (0%) غير موافقة بشدة على العبارة.

ت. تنص العبارة الثالثة " التخطيط الاستراتيجي يعمل على توفير الخدمات الأساسية والبنى التحتية لقيام المشاريع الاقتصادية المستقبلية "

يتبين من الشكل (3) والجدول (9) أن عينة الدراسة تضمنت على (57) إجابةً ونسبة (61.29%) موافقة بشدة بحيث تثبت هذه الفرضية، و (35) إجابةً ونسبة (37.63%) موافقة، و (1) إجابةً ونسبة (1.08%) محايدة، و (0) إجابةً ونسبة (0%) غير موافقة و (0) إجابةً ونسبة (0%) غير موافقة بشدة على العبارة.

ث. تنص العبارة الرابعة " التخطيط الاستراتيجي يساعد في جذب الفرص الاقتصادية والسياحية لخلق فرص استثمارية جديدة "

يتبين من الشكل (4) والجدول (10) أن عينة الدراسة تضمنت على (51) إجابةً ونسبة (54.84%) موافقة بشدة بحيث تثبت هذه الفرضية، و (34) إجابةً ونسبة (36.56%) موافقة، و (8) إجابةً ونسبة (8.6%) محايدة، و (0) إجابةً ونسبة (0%) غير موافقة و (0) إجابةً ونسبة (0%) غير موافقة بشدة على العبارة.

ج. تنص العبارة الخامسة " التخطيط الاستراتيجي يعمل على تقوية العلاقة بين صغار المنتجين وكبار المنتجين في المناطق الحضرية "

يتبين من الشكل (5) والجدول (11) أن عينة الدراسة تضمنت على (25) إجابةً ونسبة (26.88%) موافقة بشدة، و (46) إجابةً ونسبة (49.46%) موافقة بحيث تثبت هذه الفرضية، و (18) إجابةً ونسبة (19.35%) محايدة، و (4) إجابةً ونسبة (4.3%) غير موافقة و (0) إجابةً ونسبة (0%) غير موافقة بشدة على العبارة.

ج. تنص العبارة السادسة " تركيز مشاريع التخطيط الاستراتيجي في ولاية الخرطوم يحفز النزوح إليها من الولايات الطرفية "

يتبين من الشكل (6) والجدول (12) أن عينة الدراسة تضمنت على (49) إجابةً وبنسبة (52.69%) موافقة بشدة بحيث تثبت هذه الفرضية، و (23) إجابةً وبنسبة (24.73%) موافقة، و (13) إجابةً وبنسبة (13.98%) محايدة، و (6) إجابةً وبنسبة (6.45%) غير موافقة و(2) إجابةً وبنسبة (2.15%) غير موافقة بشدة على العبارة.

النتائج والتوصيات:

أولاً: النتائج

1. قلة الاهتمام بالتنمية الإقليمية والحضرية عند وضع المخططات الهيكلية والتفصيلية أدت لتركيز الخدمات والمرافق العامة بمدينة الخرطوم الأمر الذي أدى إلى أن تصبح محور جاذب لسكان السودان من جميع الولايات.
2. ضعف آليات مراقبة وتنفيذ التنمية الحضرية والسياسات العامة والتشغيلية التي من المفترض أن تعمل على ضبط عملية التنمية الحضرية المتوازنة سواء على المستوى القومي أو الإقليمي أو الولائي.
3. التخطيط الاستراتيجي للتنمية الحضرية يعمل على رفع مستوى دخل الفرد ويفتح فرص عمل ويساعد في جذب الفرص الاقتصادية والسياحة لخلق فرص استثمارية جديدة.
4. التخطيط الاستراتيجي للتنمية الحضرية يعمل على توفير الخدمات الأساسية والبنى التحتية لقيام المشاريع الاقتصادية المستقبلية.
5. التخطيط الاستراتيجي للتنمية الحضرية يعمل على تقوية العلاقة بين صغار المنتجين وكبار المنتجين، تكامل الولايات وعدم انفصالها إذا ما نفذت حسب الدراسات والخطط الموضوعة.
6. نالت الخبرة في مجال التخطيط الاستراتيجي بين 6 - 10 سنوات بنسبة بلغت (45.16%) وذلك للاهتمام مؤخراً بالتخطيط الاستراتيجي وإهماله في العقود السابقة، والاهتمام بالكوادر القيادية الشابة.
7. انخراط عدد من التخصصات العلمية والمهنية في مجال التخطيط الاستراتيجي وذلك لشمولية عملية التخطيط الاستراتيجي وتكامله مع التخصصات الأخرى، لخلق رؤيا استراتيجية حضرية متوازنة لمدينة الخرطوم.
8. تبين من الدراسة أن التخطيط الاستراتيجي يعمل على رفع مستوى دخل الفرد وفتح فرص عمل.
9. أظهرت الدراسة أن التخطيط الاستراتيجي يساهم في الاستغلال الأمثل للثروات الطبيعية والمائية والسياحية وتوزيع الموارد بصورة متوازنة.
10. تبين من الدراسة أن التخطيط الاستراتيجي يعمل على توفير الخدمات الأساسية والبنى التحتية لقيام المشاريع الاقتصادية المستقبلية.

11. أظهرت الدراسة أن التخطيط الاستراتيجي يساعد في جذب الفرص الاقتصادية والسياحة لخلق فرص استثمارية جديدة.

التوصيات:

بعد الدراسة المستفيضة للواقع الحالي لمدينة الخرطوم واستناداً على نتائج الدراسة فإن الدراسة خلصت إلى عدة توصيات ورؤيا استراتيجية يمكن إجمالها بما يلي:

1. وضع استراتيجيات واضحة للتنمية الحضرية وتكاملها مع الاستراتيجيات الفرعية وملزمة التنفيذ من قبل الدولة.
2. وضع مخططات هيكلية وتفصيلية تهتم بالتنمية الإقليمية والحضرية، تراعي الجوانب الاقتصادية والاجتماعية.
3. وضع قوانين وآليات مراقبة للسياسات العامة والتشغيلية التي تعمل على ضبط عملية التنمية الحضرية المتوازنة على المستوى الإقليمي والولائي والمحلي.
4. مراعاة الجوانب الاقتصادية كفرص العمل ومستوى الدخل والجوانب الاجتماعية في وضع استراتيجية التنمية الحضرية.
5. الاهتمام باستراتيجية التنمية الحضرية المتوازنة لوضع مدينة الخرطوم في موضع المبادرة بدلا من دور حل الأزمات بصورة مستمرة.
6. العمل على وضع استراتيجية التنمية الحضرية وربطها بالمخططات الإقليمية في ولايات السودان المختلفة وتحديد اتجاهات النمو الحضري المستقبلي الموجه.
7. فتح المجال للدراسات في مختلف العلوم والاختصاصات التي تعين المتخصصين في قضايا استراتيجيات التنمية الحضرية.
8. وضع آليات محلية لمراقبة تنفيذ استراتيجيات التنمية الحضرية وفقاً لمؤشرات سودانية تساعد على العمل بكفاءة وفاعلية.

جدول (1) التطور السكاني بولاية الخرطوم (1973 م - 2018 م)

السنة	1973	1983	1993	2008	تقديرات 2018
عدد السكان	299,399	473,597	947,437	2,207,497	7,201,659

المصدر: الجهاز المركزي للإحصاء - التعداد الخامس 2008 واسقاطاته

جدول (2) الكثافة السكانية لكل الوحدات الإدارية

الكثافة السكانية (نسمة / م ²)	المساحة (م ²)	عدد السكان (نسمة)	الوحدة الإدارية
1.136.000	10.000	11.364	وسط الخرطوم
16.795.000	26.000	436.678	الخرطوم شمال
100.159.000	29.000	2.904.632	الخرطوم شرق
14.931.000	7.000	104.523	الخرطوم غرب
17.365.000	19.000	329.948	الشجرة
8.670.000	88.000	763.025	الشهداء سوبا
9.019.000	20.000	180.380	الكلاكلة شرق
6.781.000	19.000	128.854	الكلاكلة غرب
512.000	493.000	252.639	جبل أولياء
6.181.000	50.000	309.042	الأزهري
9.812.000	31.000	304.161	النصر

المصدر: إعداد الباحثين استناداً على الجهاز المركزي للإحصاء - التعداد الخامس 2008

جدول (3) الكثافة السكانية الإجمالية لمدينة الخرطوم

نوع الكثافة	الكثافة نسمة / م ²	إسقاط السكان لمدينة الخرطوم	العام
متوسطة	3573000	630502	2008
متوسطة	4094000	732917	2013
متوسطة	4554000	815230	2018
متوسطة	5137000	919662	2023
متوسطة	5764000	913.031.1	2028
متوسطة	6468000	865.157.1	2033

المصدر: إعداد الباحثين بالاعتماد على الجهاز المركزي للإحصاء ولاية الخرطوم

جدول (4) الكثافة السكانية الإجمالية لمحلية جبل أولياء

العام	اسقاط السكان لمحلية جبل أولياء	الكثافة نسمة /م ²	نوع الكثافة
2008	942.429	1532000	متوسطة
2013	1.06.155	1728000	متوسطة
2018	1.199.346	1959000	متوسطة
2023	1.351.133	2196000	متوسطة
2028	1.513.828	2461000	متوسطة
2033	1.696.112	2757000	متوسطة

المصدر: إعداد الباحثين بالإعتماد على الجهاز المركزي للإحصاء ولاية الخرطوم

جدول (5) نمط المعيشة بولاية الخرطوم

المحلية	سكان الحضر	سكان الريف	المجموع
الخرطوم	639.598	—	639.598
جبل أولياء	771.260	171.169	942.429
بحري	465.999	142.818	608.817
أم درمان	344.575	168.513	513.088
كرري	642.418	71.661	714.079
أمبدة	862.666	125.497	988.163
شرق النيل	546.212	321.935	868.147
ولاية الخرطوم	4.272.728	1.001.593	5.274.321

المصدر: الجهاز المركزي للإحصاء، 2008

جدول (6) التوزيع التكراري لأفراد عينة الدراسة عن متغير النوع

النوع	التكرار	النسبة المئوية
ذكر	35	37.63 %
انثي	58	62.37 %
المجموع	93	100.00 %

المصدر: إعداد الباحثين استناداً على نتائج الاستبانة

جدول (7) التوزيع التكراري لأفراد عينة الدراسة عن متغير العمر

العمر	التكرار	النسبة المئوية
20-30	35	37.63 %
31-40	38	40.86 %
41-50	14	15.05 %
51-60	6	6.45 %
المجموع	93	100.00 %

المصدر: إعداد الباحثين استناداً على نتائج الاستبانة

جدول (8) التوزيع التكراري لأفراد عينة الدراسة عن متغير المؤهل العلمي

المؤهل	التكرار	النسبة المئوية
دبلوم	2	2.15%
بكالوريوس	21	22.58%
دبلوم عالي	5	5.38%
ماجستير	46	49.46%
دكتوراة	19	20.43%
المجموع	93	100.00%

المصدر: إعداد الباحثين استناداً على نتائج الاستبانة

جدول (9) التوزيع التكراري لأفراد عينة الدراسة عن متغير سنوات الخبرة

الخبرة	التكرار	النسبة المئوية
اقل من 5 سنوات	29	31.18%
6-10 سنوات	42	45.16%
11-15 سنوات	10	10.75%
16-20 سنوات	4	4.30%
أكثر من 21	8	8.60%
Total	93	100.00%

المصدر: إعداد الباحثين استناداً على نتائج الاستبانة

جدول (10) التوزيع التكراري لأفراد عينة الدراسة عن متغير التخصص

النسبة المئوية	التكرار	التخصص
43.01%	40	استراتيجي
10.75%	10	اقتصادي
23.66%	22	اداري
7.53%	7	اجتماعي
15.05%	14	تخطيط عمراني
100.00%	93	المجموع

المصدر: إعداد الباحثين استناداً على نتائج الاستبانة

جدول رقم (11) الوسط لإجابات أفراد عينة الدراسة على عبارات الفرضية الرئيسية

العبارات	الوسط الحسابي	التفسير
التخطيط الاستراتيجي يعمل على رفع مستوى دخل الفرد وفتح فرص عمل	1.57	موافقون بشدة
التخطيط الاستراتيجي يساهم في الاستغلال الأمثل للثروات الطبيعية والمائية والسياحية وتوزيع الموارد بصورة متوازنة	1.49	موافقون بشدة
التخطيط الاستراتيجي يعمل على توفير الخدمات الأساسية والبنى التحتية لقيام المشاريع الاقتصادية المستقبلية	1.4	موافقون بشدة
التخطيط الاستراتيجي يساعد في جذب الفرص الاقتصادية والسياحة لخلق فرص استثمارية جديدة	1.54	موافقون بشدة
التخطيط الاستراتيجي يعمل على تقوية العلاقة بين صغار المنتجين وكبار المنتجين في المناطق الحضرية	2.01	موافقون
تركيز مشاريع التخطيط الاستراتيجي في ولاية الخرطوم يحفز النزوح إليها من الولايات الطرفية	1.81	موافقون

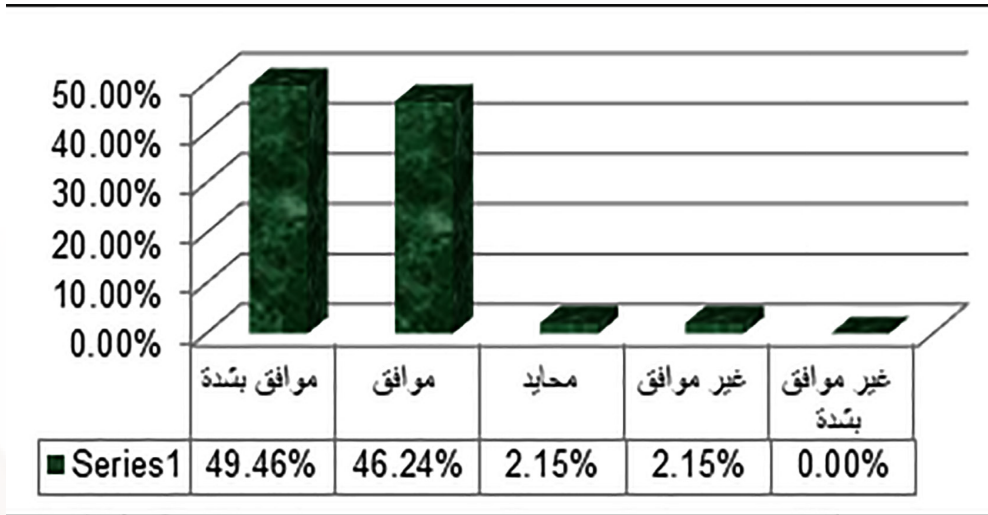
المصدر: إعداد الباحثين استناداً على نتائج الاستبانة

جدول رقم (12) تلخيص إجابات أفراد عينة الدراسة على العبارات الخاصة بالفرضية الرئيسية:

الإجابة	التكرار	النسبة المئوية	الوسط الحسابي / التفسير
موافق بشدة	281	50.36%	1.64
موافق بشدة			
موافق	216	38.71%	
محايد	46	8.24%	القيمة الاحتمالية 0.00
درجة الحرية	4		
القيمة الجدولية لاختبار مربع كاي			588
غير موافق	13	2.33%	
غير موافق بشدة	2	0.36%	
المجموع	558	100.00%	

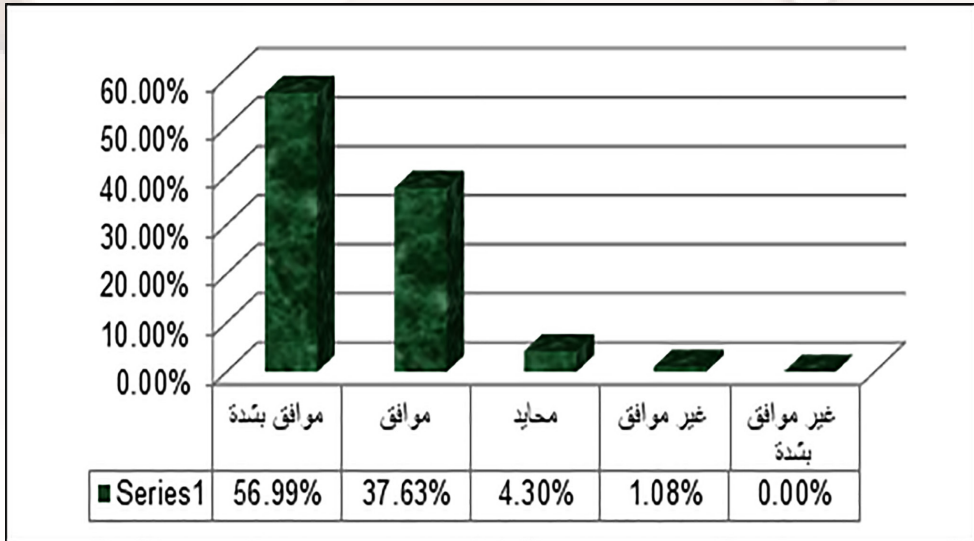
المصدر: إعداد الباحثين استناداً على نتائج الاستبانة

شكل (1) التوزيع التكراري لأفراد عينة الدراسة على العبارة اعلاه



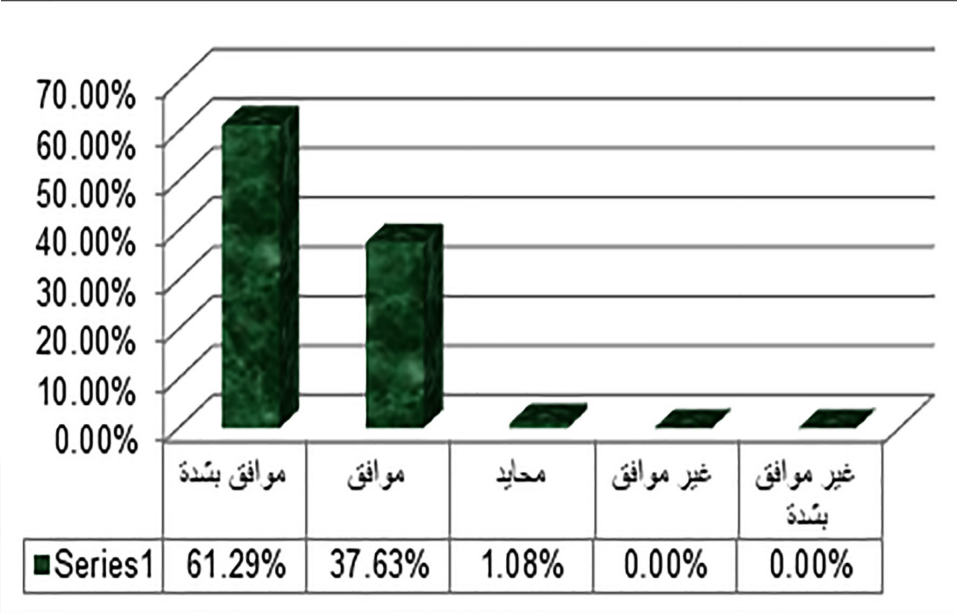
المصدر: إعداد الباحثين استناداً على نتائج الاستبانة

شكل (2) التوزيع التكراري لأفراد عينة الدراسة على العبارة اعلاه



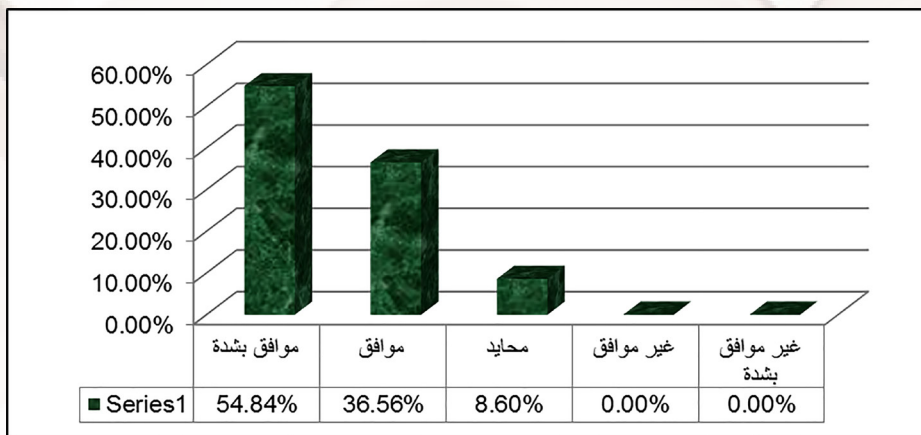
المصدر: إعداد الباحثين استناداً على نتائج الاستبانة

شكل رقم (3) التوزيع التكراري لأفراد عينة الدراسة على العبارة اعلاه



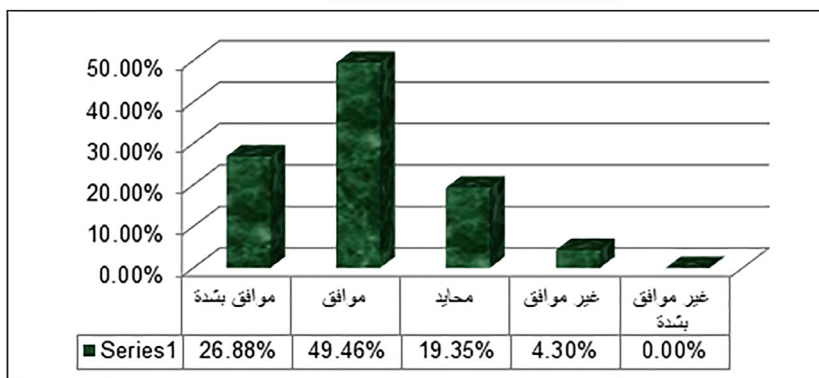
المصدر: إعداد الباحثين استناداً على نتائج الاستبانة

شكل (4) التوزيع التكراري لأفراد عينة الدراسة على العبارة اعلاه



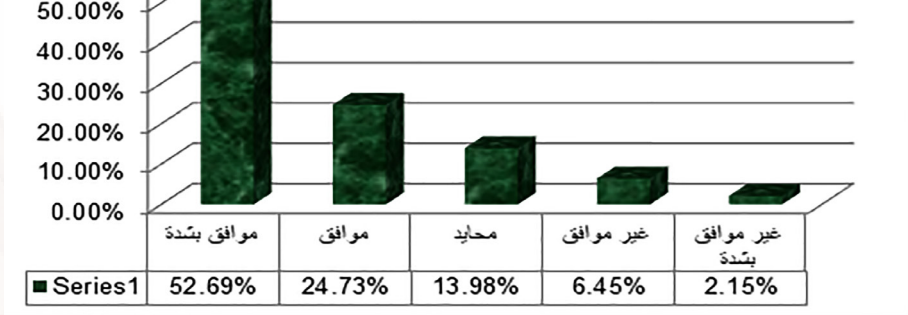
المصدر: إعداد الباحثين استناداً على نتائج الاستبانة

شكل (5) التوزيع التكراري لأفراد عينة الدراسة على العبارة اعلاه



المصدر: إعداد الباحثين استناداً على نتائج الاستبانة

شكل (6) التوزيع التكراري لأفراد عينة الدراسة على العبارة اعلاه



المصدر: إعداد الباحثين استناداً على نتائج الاستبانة

المصادر والمراجع:

- (1) إبراهيم، سعد الدين، التنمية في مصر، الكتاب الثاني للتنمية الريفية، مكتبة النهضة المصرية، القاهرة، 1982م، ص 19.
- (2) أبو سليم، محمد إبراهيم، الفونج والأرض، وثائق تملك، مطبعة التمدن، الطبعة الأولى، الخرطوم، السودان، 1967م، ص 52.
- (3) أبو سالم، ياسمين عدنان، مقال الفرق بين النمو والتنمية، موقع موضوع 14 يناير 2016م، ص 2.
- (4) أبو صالح، محمد حسين، التخطيط الإستراتيجي القومي، منهج المستقبل، طبعة 5، 2011م، ص 55.
- (5) آمال عبد الرحمن النعيم أحمد، رسالة ماجستير غير منشورة استخدامات الأرض في مدينة الخرطوم خلال الفترة من (2000-1976م)، جامعة الخرطوم، السودان، 2005م، ص 46.
- (6) أنريه بوفر، المدخل إلى الإستراتيجية العسكرية، ترجمة: ديري والهيثم الأيوبي، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت 1970م، ص 16.
- (7) الاستشاري ناصفة، 2012م، الخرطوم، السودان.
- (8) الجهاز المركزي للإحصاء - 2008م، الخرطوم، السودان.
- (9) بابكر، بشري الطيب، مشروع الاستقلال الأمثل للأراضي والعقارات الحكومية بولاية الخرطوم، مركز التنمية الحضرية والريفية، وزارة الشؤون الهندسية، ولاية الخرطوم، الخرطوم، السودان، 1997م، ص 38.
- (10) حسن، عدنان السيد، الجغرافيا السياسية والاقتصادية والسكانية للعالم المعاصر، 1996م، ص 76.
- (11) جلال، أحمد فهمي، إستراتيجية الإدارة، الطبعة الأولى، دار الفكر العربي، القاهرة، مصر، 1982م، ص 61.
- (12) جمال سلامة علي، تحليل العلاقات الدولية، دراسة في إدارة الصراع الدولي، دار النهضة العربية، القاهرة، 2012م، ص 86.
- (13) شفق الوكيل، التخطيط العمراني مبادئ أسس تطبيقات، الجزء الأول، القاهرة، 2006م، ص 90.
- (14) غنيم، عثمان محمد، تخطيط إستخدام الأرض الريفي والحضري، دار صفاء، عمان، الأردن، 2001م، ص 84.
- (15) محمد نجيب سليمان الحويرص، ورقة بعنوان تجربة الخرطوم الكبرى في التخطيط مؤتمر التخطيط العمراني والأثر البيئي والسكن العشوائي في الوطن العربي، الخرطوم، السودان، 1996م، ص 8.

- (16) (13) نمر، سامية علي، رسالة ماجستير غير منشورة التمدد الافقي وآثاره على التطور العمراني دراسة ميدانية في الخرطوم الكبرى، جامعة الخرطوم، الخرطوم، السودان، 1999م، ص 19.
- (17) (8) يخلف، محمد، دراسة واقع المشاريع التنموية في ولاية بسكرة، رسالة ماجستير غير منشورة في الاقتصاد جامعة محمد خيضر بسكرة، 2013م، ص 29.

التكيف الفقهي للمواطنة والجنسية

كلية القانون – كلية الإمام الهادي

د. خالد فايت حسب الله

المستخلص

تهدف الدراسة إلى معرفة التكيف الفقهي لمفهوم المواطنة والجنسية من خلال دستور دولة المدينة، والذي يعتبر نموذجاً للدولة المدنية والمواطنة، وهو النموذج الذي يسعى له العلماء اليوم، في حين أن الرسول ﷺ سبق الدولة المدنية الحديثة في إرساء مبادئ المواطنة وتطبيق هذا النموذج على كل الكيانات الاجتماعية التي يجمعها وطن واحد. يسع الجميع على الرغم من تباين العادات والتقاليد. فالفقه الإسلامي استوعب هذه المتغيرات من خلال المساواة في الحقوق والواجبات بين جميع أفراد المجتمع مما يؤدي إلى شعور الجميع بالمساواة والعدالة وينعكس إيجاباً على استقرار الدولة. ولكن بعد اندثار الدولة...اضمحلالها وخضوعها للاحتلال تغيرت التركيبة السكانية، وظهرت دعوات تدعو لقيام دولة خالصة من حيث المكون الاجتماعية والديني، مع العلم أن الدولة في السياسة الشرعية ليست دولة خالصة من حيث المكون الاجتماعي أو الديني أو المذهبي (وإن كانت هناك نماذج للدولة المذهبية أو الطائفية) تبعاً لمرجعية دستور دولة المدينة، وبناءً على ذلك علاج دستور دولة المدينة مشكل اكتساب أو فقدان المواطنة أو الجنسية، وللوصول إلى معرفة هذه المعالجة تم استخدام المنهج الاستقرائي، وتوصلت الدراسة إلى عدة نتائج وتوصيات، ومن أهم النتائج التكيف الفقهي للمواطنة الذي يقوم على أساس ضرورة وحدة الإنسانية والمصالح المشتركة...المساواة في الحقوق والواجبات - تعتبر وثيقة دولة المدينة أساس جاذب للمواطنة وللمساواة في الحقوق والواجبات بين مكونات المجتمع، في حالة ارتكاب جرم يعاقب الجاني وليس منيئها ما يسمى بإسقاط أو سحب المواطنة أو الجنسية في دستور دولة المدينة، ومن التوصيات: يجب إعادة دراسة السياسة الشرعية بما يتوافق مع المتغيرات المعاصرة مع استصحاب مقاصد الشريعة — نوصي المشرع باستبدال مصطلح الجنسية بمصطلح المواطنة لما تحققه من وحدة وتعايش بين جميع مكونات المجتمع.

Abstract

The study aims to know the jurisprudential adaptation of the concept of citizenship and nationality through the constitution of the city-state, which is considered a model for the civil state and citizenship, and it is the model that

scholars seek today, while the Messenger, may God bless him and grant him peace, preceded the modern civil state in establishing the principles of citizenship. And the application of this model to all social entities brought together by one nation can accommodate everyone despite the difference in customs and traditions. Islamic jurisprudence has absorbed these variables through equality in rights and duties among all members of society, which leads to everyone feeling equal and just and positively on the stability of the state. But after the disappearance of the state and ... its decay and submission to the occupation, the demographics changed, and calls for the establishment of a pure state in terms of the social and religious component appeared, bearing in mind that the state in legal politics is not a pure state in terms of the social, religious or sectarian component (even if there is Models of the sectarian or sectarian state) according to the reference of the city-state constitution, and based on that, the city-state constitution addressed the problem of acquiring or losing citizenship or nationality, and to reach knowledge of this treatment, an inductive approach was used, and the study reached several results and recommendations, and one of the most important results is adaptation Jurisprudence for citizenship is based on the necessity of the unity of humanity and common interests and ... equality in rights and duties - The city-state document is considered an attractive basis for citizenship and for equality in rights and duties among the components of society. In the event that a crime is committed, the perpetrator is punished, and none of them is called dropping or withdrawing Citizenship or nationality in the constitution of the city-state, and among the recommendations: Sharia policy must be re-examined in line with contemporary variables while accompanying the purposes of Sharia - we recommend that the legislator replace the term nationality In the term citizenship, because it achieves unity and coexistence between all components of society.

مقدمة :

تعتبر قضايا المواطنة والجنسية والهوية والأمة من المصطلحات التي شغلت الساحة السياسية، وبناء عليها شهد العالم موجة من التغيرات أدت إلى انفصال كيانات اجتماعية جغرافياً أو عرقياً أو مذهبياً أو طائفيّاً برقعة الأرض التي يسكنون فيها وعلى إثرها حاول المفكرون السياسيون

وغيرهم من المختصين في هذا المجال أن يقدموا معالجات لها إلا أنها تعذر استيعابها، بينما نجد أن الفقه الإسلامي السياسي (السياسة الشرعية) المتخصص في شؤون العباد والبلاد استوعب هذه الجزئية من خلال دستور دولة المدينة والذي يعتبر النموذج الذي زاوج بين الكيانات الاجتماعية والطائفية والمذهبية الموجودة في الدولة على أساس المواطنة والمساواة في الحقوق والواجبات.

أهمية الموضوع :

1. بيان التكيف الفقهي للمواطنة والجنسية من حيث اكتسابها.
2. بيان أن المواطنة تستوعب حل المشاكل الخاصة بالإثنيات والاندماج والتهميش والإقصاء والانفصال وحق تقرير المصير.

أسباب اختيار الموضوع:

تمثل في ظهور دعوات تطالب بانفصال كيانات اجتماعية من الدولة أو تقرير حق المصير من الدولة على أساس جغرافي أو قبلي.

مشكلة البحث:

تظهر مشكلة البحث في معرفة كيف عالج الفقه الإسلامي من خلال السياسة الشرعية المتمثلة في دستور دولة المدينة موضوع المواطنة وكيفية اكتسابها.

منهج البحث:

تم استخدام المنهج الاستقرائي باعتبار أن موضوع المواطنة مرتبط بأركان الدولة وسيادتها.

الدراسات السابقة:

تناول عدد مقدر من الباحثين موضوع المواطنة والجنسية من حيث المقارنة وكيفية اكتساب الجنسية وفقدانها بحسب قانون الدول التي يعيشون فيها، إلا أن هذا البحث يركز على مفهوم المواطنة من خلال دستور دولة المدينة وكيفية اكتسابها والعقوبة حالة الإخلال بها وليس فقدانها بالإضافة إلى أن الدولة في السياسة الشرعية تسع الجميع من حيث المساواة في الحقوق والواجبات.

مفهوم الجنسية والمواطنة في اللغة والاصطلاح

تعريف الجنسية والمواطنة في اللغة والاصطلاح

الفرع الاول: تعريف الجنسية في اللغة

الجنسية في اللغة أصلها من (جَنَسَ) ومعناها عند اللغويين أعم من النوع وهو كل ضرب من الشيء⁽¹⁾، فالجنس اسم دال على كثيرين مختلفين بالأنواع فهو أعم من النوع⁽²⁾. فالجنس طبقة في التصنيف فوق النوع؛ الحيوان جنس والإنسان نوع - يقال يعمل في مؤسسة موظفون من الجنسين أي من النوعين، الجنس المذكر والجنس المؤنث. ومن مشتقات (جنس) الجنسين: العريق في جنسه، والمجانس: المشاكل ويقال جَنَسَ الأشياء: أي شاكل بين أفرادها، وجَنَسَ المواد: نسبها إلى أجناسها، وجَنَسَ أجنبياً: أعطاه الجنسية، وتجنس الشخص: اكتسب جنسية دولة⁽³⁾.

فالجنسية مصدر صناعي من (جنس) يدل على صفة تلحق بالشخص من جهة انتسابه لشعب أو أمة أو وطن، فهي حالة أو ماهية تفيد حالة الشخص أو ماهيته بالنسبة للآخرين من نفس الجنس⁽⁴⁾. أما كلمة (Natus) في اللاتينية معناها الجنس (بمعنى العرق) حسب المفردة الإنجليزية (Race)، بينما يشير المصطلح في اللغة الإنجليزية نجدها عند كلمة (Nationality) ومصدرها الكلمة اللاتينية (Nacie/Nasci/Natus) وهي في أبسط معانيها تتضمن فعل الولادة (To be born) والتي تفيد الميلاد أو المولد⁽⁵⁾. وباستقراء هذه المعاني نجد أنها تشير إلى فكرة سياسية وقانونية تُعبر عن انتساب الفرد إلى دولة من دول العالم أو وطن من الأوطان.

الفرع الثاني: تعريف الجنسية في اصطلاح الفقه الإسلامي

نجد أن مصطلح الجنسية من المصطلحات المستحدثة والتي لم ترد في كتب الفقهاء، وبما أن الجنسية تنظم العلاقة بين الفرد والدولة من خلال الروابط السياسية والقانونية والاجتماعية، فإن هذا المصطلح أخذ في الدخول إلى الأمة الإسلامية مع سقوط الخلافة العثمانية في عشرينيات القرن الماضي، وقد رفض بعض العلماء فكرة الجنسية⁽⁶⁾. باعتبار أن الإسلام لم يفرق بين رعايا الدولة الإسلامية من غير المسلمين ويتجلى ذلك في وثيقة المدينة. وما مجتمع المدينة إلا نموذج لمفهوم المواطنة والدولة والمدينة الحديثة والتي تقوم على أساس (دستور المدينة) وحدة الأمة من المسلمين وغير المسلمين من اليهود والمسيحيين، فالدين في السياسة الشرعية يعتبر عنصر وحدة وليس عامل تفرقة بين الأفراد، خلافاً لما كان في عصر الامبراطورية الرومانية؛ فظل الدين عامل التفرقة بين الأفراد في عصر الامبراطورية الرومانية؛ فكان للدين الأثر الواضح في تحديد شكل الأسرة والسلطة الأبوية لرب الأسرة، وتحديد أشكال الملكية وقواعد الميراث، فكان المواطن في تلك الفترة هو الشخص الذي يعتنق ديانة المدينة، والأجنبي هو الذي لا يتمتع بحق الدخول في تلك الديانة⁽⁷⁾. ونجد أن مفهوم الجنسية مرتبط بالدين في النموذج الإسرائيلي، فالجنسية تستند على رابطة الدين اليهودي، وبحق العودة لكل من يعتنق الديانة اليهودية إلى دولة إسرائيل، له حق أن يصير إسرائيلياً بقوة القانون⁽⁸⁾، فالمادة (14) من قانون جنسية الكيان الصهيوني تأخذ بالهوية الدينية في منح الجنسية، إذ تعتبر كل يهودي في العالم هو من مواطنيها شرط أن يكون من أم يهودية⁽⁹⁾.

إن القول بأن ما حدث في عصر الامبراطورية هو شبيه بما حدث في عهد الدولة الإسلامية، بأن كل من يعتنق الإسلام يعتبر من رعايا دولة الإسلام بغض النظر عن مكان وجوده⁽¹⁰⁾. هذا خلط وقول غير دقيق حيث إن النظام الدولي وقتئذ مبناه التفرقة بين الأمم على أساس ديني، فهي أسس ومعايير كونية حاسمة لهوية الدول ومواطنيها وقتئذ، بينما نجد الإسلام لم يفرق بين مواطني الدولة الإسلامية من غير المسلمين ويتجلى ذلك في وثيقة دولة المدينة. إذن الجنسية رابطة قانونية وسياسية تُنسب الفرد لدولته، في حين أن الأمة رابطة اجتماعية تدل على من يشتركون مع الفرد في الثقافة والعادات والتقاليد والأعراف واللغة والتاريخ وغيره بما يوحد المواقف الكبرى، وقد نجد تطابقاً بين الأمة والدولة في عدد من الدول - الآن - كما

هو الحال في أوروبا، واختلافاً كما هو الحال في الدول العربية في العصر الحديث، إن مبدأ الدول متعددة والأمة واحدة، فالأمة الإسلامية أمة واحدة ولكن الدول العربية ليست دولة واحدة بل متعددة، فالفقه الإسلامي لا يقبل من الدولة إلا أن تكون ممثلة لوحدة الجماعة، فالدولة في الإسلام هي الحاضنة لوحدة الجماعة، ولهذا يجب على الفرد أن ينتسب إليها، كما يمنع عليه الانفصال حتى لا تتفرق وحدة الجماعة، فالانتماء للأمة الواحدة مطابقاً للانتماء للدولة الواحدة، فكل أفراد الأمة المقيمين في دار الإسلام هم مواطنو الدولة الذين ينتسبون إليها⁽¹¹⁾.

الفرع الثالث: تعريف المواطنة في اللغة

المواطنة في اللغة: المنزل تقيم به وطن يطن وطناً: أقام به، وطن البلد، اتخذها وطناً وجمع وطن أوطان: منزل إقامة الإنسان ولد فيه أم لم يولد.⁽¹²⁾ ومواطنة: مصدر الفعل واطن بمعنى شارك في المكان إقامة مولداً لأن الفعل على وزن فاعل⁽¹³⁾، فالوطن كل مقام به الإنسان لأمر، وأوطان الغنم ومرابطها، وأوطان الأرض ووطنها واستوطنها أي اتخذها وطناً.⁽¹⁴⁾

الفرع الرابع: المواطنة في الفقه الإسلامي:

نجد أن الإسلام أرساء مفهوم المواطنة من خلال صحيفة المدينة قبل ان ترسي اتفاقية وستفاليا 1648م المبادئ الخاصة بالمواطنة، وتعتبر صحيفة المدينة بمثابة أول دستور في العالم يكرس لمبدأ المواطنة في دولة ضمت مسلمين ومسيحيين ويهود ولا دينيين، ولم تضع الصحيفة شروطاً للانتماء للأمة السياسية فالدين ليس شرطاً للمواطنة، فهذه الوثيقة تجعل غير المسلمين المقيمين في دولة المدينة مواطنين فيها، لهم من الحقوق مثل ما للمسلمين وعليهم من الواجبات مثل ما على المسلمين.⁽¹⁵⁾

بينما نجد جذور المواطنة الإغريقية القديمة والتي كان تستبعد النساء من فئة المواطنين وتقتصر المواطنين على الذكور الأحرار الذين يتمتعون بالمساواة وهو ما عليه الأمر في الجنسية فإن المرأة في بعض الدول لا تمنح جنسيتها لأبنائها حتى لو كان مكتوب في الدستور إلا بشق الأنفس. بينما جاء مفهوم المواطنة في إعلان الاستقلال الأمريكي عام 1776م والإعلان الفرنسي لحقوق الإنسان والمواطن الفرنسي 1789، وجاء في حقوق الإنسان وحرياته الإعلان العالمي لحقوق الإنسان 1948م والعهدين الدوليين الملحقين به عام 1966م نجد أن مفهوم المواطنة يختلف عن مفهوم الجنسية في بعض الدول بينما يتطابق معها في بعض الدول منح الجنسية، وهناك من يرى أن الجنسية أوسع من المواطنة بحيث تشمل مقومات المواطنة.

فالمواطنة في الفقه الإسلامي ممارسة عملية تحقق التجانس وتستوعب التنوع الثقافي والديني والإثني، فما يراه البعض من عدم تجانس بدا لهم فإنه ليس كذلك، فإن الذي ينظر إلى القرآن الكريم والسنة النبوية يجد ما يشير إلى التعايش في ظل هذا التباين، بل عبر عنه القرآن بالتعارف بين الناس فيما بينهم، ونجد أن الرسول ﷺ أسس دولته على الرغم من وجود هذا التباين بين الأديان والذي لم يكن عائقاً في قيام دولة المدينة، ووثيقة المدينة حثت على النصر

والعون والنصح والتناصح والبر من دون الإثم والدفاع عن الدولة وسيادتها وإشاعة روح المساواة والعدل والتعاون والتعايش السلمي بين مكونات المجتمع مما يضمن المساواة بين المواطنين وهو مبدأ يكرس لحق المواطنة، بالإضافة إلى حرية الاعتقاد للمسلمين دينهم ولليهود دينهم وأشارت الوثيقة إلى مسؤولية الفرد فيما يكتسبه الفرد من جرم فلا يقع العقاب عليه.

أما فيما يختص بالولاية والسيادة والمشاركة السياسية فهناك عدة آراء في المسألة:

1. الرأي الأول عدم مشاركة غير المسلم في حق الشؤون السياسية وإدارة الدولة.
 2. الرأي الثاني يحق لهم ممارسة كل الشؤون السياسية بما فيها تولي الرئاسة وممارسة كل الحقوق والواجبات، ما داموا من الدولة الإسلامية ومواطنين.⁽¹⁶⁾
- مما تقدم أرى أن الرأي الثاني هو الرأي الراجح فما بني عليه الرأي الأول غير متحقق الآن بينما الرأي الثاني يتماشى مع مفهوم الدولة المعاصرة التي تمارس السلطة التنفيذية سلطاتها وإصدار التشريعات والتي تعبر عن روح المجتمع، فالجميع لهم الحق في إدارة الدولة ما دام لا يتعارض مع مبادئ الشرع ويحقق مقاصد الشارع فيما يختص بالدعوى.
- وتعرف المواطنة بالآتي:

1. المواطنة اصطلاح يشير إلى الانتماء إلى أمة أو وطن.⁽¹⁷⁾
 2. المواطنة هي التزامات متبادلة بين الأشخاص والدولة، فموجبها يحصل الشخص على حقوقه المدنية والسياسية والاقتصادية والاجتماعية نتيجة انتمائه لمجتمع معين، وعليه في الوقت ذاته واجبات يتحتم عليه أداؤها.⁽¹⁸⁾
 3. المواطنة: علاقة بين فرد ودولة كما يحددها قانون تلك الدولة، وبما تتضمنه تلك العلاقة من حقوق وواجبات في تلك الدولة.⁽¹⁹⁾
- ويتبين لنا مما تقدم أن الفرق بين معايير المواطنة والجنسية والهوية يظهر في الآتي:
1. المواطنة: هي عبارة عن مصفوفة اجتماعية الانتماء إلى مجتمع يضمه بشكل عام رابط اجتماعي وسياسي وثقافي موحد في دولة واحدة. هناك من يرى أن مصطلح المواطن استبدل بمصطلح الجنسية أو مرادف له، فالشخص الذي لا يملك المواطنة في الدولة عديم الجنسية.
 2. الهوية هي من لوازم المواطنة وهي تمثل النسيج الاجتماعي بين المواطنين سواء كان في شكل سياسي - اجتماعي - قوانين - اقتصاد - قيم.
 3. قد تتناوب على الوطن أنظمة مختلفة متناقضة إسلامية شيوعية رأسمالية فبقى المواطنة على الرغم من التقلبات السياسية والاقتصادية والاجتماعية وقد يترك صاحب الجنسية جنسيته خوفاً، خلافاً للمواطن الذي لا مفر له من انتمائه للوطن حتى لو هاجر.
 4. الهوية هي المعيار الذي تحدد به ما هو أفضل أو غير أفضل أو صالح أو غير صالح

- للوطن والمواطنين، وقد تختلف المعايير بحسب السياسات، ولذلك ينظر للمواطنين إلى مصالح أوطانهم من خلال هويتهم، وليس كما يرى البعض أن المواطنين يستطيعون حل مشاكلهم بمجرد انتمائهم للمواطنة والجنسية.
5. المواطنة لا تمنح ولا تخضع للقانون وهي إرادة إلهية خلافاً للجنسية. المواطنة هي الوطن المشترك الذي ارتضى فيه الجميع اقتسام ثرواته والتعايش فيه ولذلك يبذل فيه الغالي والنفيس ويعتنى به، خلافاً للجنسية.
6. المواطنة ترتبط بامتداد مواطنة الآباء والأجداد، وهذا ما لا يوجد في الجنسية. فالمواطنة ليست كالجنسية تباع وتشترى أو تمنح أو تطلب أو يتنازل عنها أو تلغى أو تسحب من قبل السلطات بل هي تمثل ارتباطاً وجدانياً وثقافياً واقتصادياً واجتماعياً وليست هي دين أو مذهب أو قبيلة بل هي عدل ومساواة وحرية وهي ليست ولاء للحاكم سياسي، فالمواطنة هي نظرة متساوية في العدالة والحقوق والواجبات.
7. إن المواطنة لا تسقط بارتكاب جرم إنما يوقع على المجرم عقوبة دون المساس بالمواطنة، وهذا خلافاً لما عليه الأمر في الجنسية فأنها تسقط عن الشخص فيصبح بدون جنسية.
8. المواطنة لا تقاس بما يقاس به الجنس بتقديم خدمات للوطن وإلا سحبت المواطنة من العاطل والمريض.

الفرع الخامس: مبادئ وأهمية ومقومات المواطنة في الفقه الاسلامي

اولا : مبادئ المواطنة في الفقه الإسلامي

1. تعزيز وحدة الأصل الإنساني وإعمال روح الأخوة بدلاً من إهمالها، فأصل الخلق واحد وهو ما يعبر عنه بالأخوة الإنسانية والأخوة الخلقية.
2. كل إنسان يتجذر فيه حب الوطن، فغريزة حب الوطن غريزة فطرية متجذرة في النفس الإنسانية ولذلك ساوى القرآن الكريم بين الإخراج من الوطن وقتل النفس قال تعالى: (وَلَوْ أَنَّا كَتَبْنَا عَلَيْهِمْ أَنْ اقْتُلُوا أَنْفُسَكُمْ أَوْ أَخْرِجُوا مِنْ دِيَارِكُمْ مَا فَعَلُوهُ إِلَّا قَلِيلٌ مِنْهُمْ)⁽²⁰⁾، وبين النبي ﷺ حبه ملكة بعد اخراجه منها .
3. يعتبر الوطن القاسم المشترك بين المواطنين في السعادة والأحزان والألم ولذلك أي ضرر يلحق بالوطن يلحق بالمواطن. مما يدفع الجميع للوحدة في مواجهة الأخطار المحدقه به.
4. الإسلام يعترف بأن التعاون والتعارف ضرورة بشرية، وسمة اجتماعية تميز البشر عن غيرهم من الكائنات الحية، فلا يمكن أن يعيش الفرد لوحده، فالإنسان كائن اجتماعي ولذلك خلقهم قال تعالى: (يَا أَيُّهَا النَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَاكُمْ مِنْ ذَكَرٍ وَأُنْثَى وَجَعَلْنَاكُمْ شُعُوبًا وَقَبَائِلَ لِتَعَارَفُوا إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِنْدَ اللَّهِ أَتْقَاكُمْ إِنَّ اللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ)⁽²¹⁾، وقال تعالى (وَاعْتَصِمُوا بِحَبْلِ اللَّهِ جَمِيعًا وَلَا تَفَرَّقُوا)⁽²²⁾.

ثانياً: أهمية المواطنة في الفقه الإسلامي

1. تتجلى أهمية المواطنة في أنها صمام أمان لوحدة الأمة أمام النعرات القبلية والحزبية والأفكار الإقصائية والانفصالية.
2. تساهم المواطنة في الارتقاء بالإنسان والدولة إلى درجة المساواة في الحقوق والواجبات والعدل والمحافظة على القيم الإنسانية.
3. تساهم المواطنة في رفع الخلافات ووجهات النظر التي تؤدي إلى تشرذم وتشتت الأمة ولذلك فهي صمام أمان لوحدة للنسيج الاجتماعي.
4. تساهم المواطنة في المحافظة على الحقوق والواجبات لكل أطراف الأمة، مما يجعلهم سواسية أمام العدالة والنهوض بالأمة، وسواسية في الحقوق والواجبات.
5. تساهم المواطنة في إدارة التنوع والاختلاف السياسي والعقائدي والثقافي والاقتصادي والاجتماعي، إذ يشعر الكل بوجوده داخل هذه المنظومة، مما ينعكس على المواطن بالخير والتطوير.

9/ تعترف المواطنة بالتعدد الديني والثقافي مما يجعل خدمة الوطن والمواطن هي الأساس.

ثالثاً : مقومات المواطنة في الفقه الإسلامي

تتمثل مقومات المواطنة في الآتي:

1. المساواة بين جميع المواطنين في الحقوق والواجبات والقانون وتكافؤ الفرص، فالوطن تتعدد فيه الأعراق والأعراف والقبائل والعقائد، كما أن المواطنة تمثل عنصر الوحدة والاستقرار إذ لا يوجد مجال للتمييز بين المواطنين، كما تجعل المواطنين متساوين في اكتساب الامتيازات، كما أن المواطنة تنفي التهميش والإقصاء مما يساهم في وحدة الأمة.
2. مشاركة الجميع في الحياة العامة، فالكل شركاء في صناعة ورفاه الحياة العامة في الدولة.
3. الولاء: لله وللوطن، وهذا يجعل الجميع يقفز فوق العلاقة القبلية الضيقة والحزبية إذ لا خضوع إلا لسيادة التشريع وهذا يعزز الارتباط الوجداني بالوطن وقضاياه، مما يجعل الفرد والمجتمع صالحين يعملون لمصلحة الوطن والدفاع عنه واحترامه وتمتد هذه الفكرة لتشتمل المواطنين خارج أرض الوطن فيكون الولاء مغروراً فيهم.

اكتساب وفقدان المواطنة في الفقه الإسلامي

اكتساب المواطنة في الفقه الإسلامي

على إثر التعاقد السياسي بين - النبي ﷺ - والأنصار في بيعة العقبة الثانية، وهجرة الرسول إلى المدينة تكونت دولة جديدة - متنوعة الأديان والأعراق - على أساس دستور المدينة وهو (الصيغة) لها ذاتية مستقلة تميزها عن غيرها، يحكمها تشريع ويُسير حياتها السياسية

والاقتصادية والاجتماعية والقضائية والاستراتيجية والخارجية والداخلية والدعوية، وتهدف إلى غايات مشترك بين جميع طوائفها، إن (الوثيقة) التي كُتبت بإملاء من الرسول - ﷺ - في العام الأول من هجرته إلى المدينة مثلت السياسة الداخلية للدولة الإسلامية مع (اليهودي والوثني- وهو ما يُسمى في العصر الحديث بالقانون الدولي الخاص، وكذلك مثلت نظاماً متكاملًا للعلاقات الخارجية مع القبائل والشعوب والدول، وهو ما اصطلح عليه فيما بعد بالقانون الدولي العام.⁽²³⁾

بدأ النبي ﷺ كتابة دستور المدينة (الصحيفة) بقوله: (هذا كتاب من محمد النبي (رسول الله) بين المؤمنين والمسلمين من قريش و(أهل) يثرب من تبعهم فلحق بهم وجاهد معهم، إنهم أمة واحدة من دون الناس...، وأن يهود بني عوف أمة مع المؤمنين، لليهود دينهم وللمسلمين دينهم مواليهم وأنفسهم إلا من ظلم وأثم...⁽²⁴⁾).

فالمواطنة رابطة قانونية وسياسية بين الفرد والدولة، فينسب الفرد إليها وترده لمجتمعه بمقتضى هذه الرابطة يتعين تبعية الشخص للشعب الذي يقوم عليه كيان الدولة ويميزه عن الذي لا ينتسب إليها، بهذا المفهوم يكون من لوازم بناء الدولة تحديد نظام المواطنة الخاص بها، يتضمن أسباب اكتسابها وفقدانها.

وقد جاء في القرآن الكريم الإشارة إلى الوحدات الاجتماعية كالأمة والقوم والشعب والقبيلة وغيرها، وهي إشارة اعتراف بهدف تكوين كيان اجتماعي مترابطة متمثل في المواطنة، فاستخدم القرآن الكريم لفظ {أمة وأمم وأمتكم} خمساً وستين مرة، منها آية تذكر أن الطير أمة، وآية تذكر أن إبراهيم كان أمة، وقد استخلص الراغب الأصفهاني معنى جامعاً حيث يقول: (الأمة كل جماعة يجمعهم أمر ما، إما دين واحد أو زمان واحد أو مكان واحد، سواءً أكان ذلك الأمر الجامع تسخيراً أم اختياراً)⁽²⁵⁾. والأصفهاني يجعل كلمة {أمة} جامعة لأمة البشر المجتمعة بالاختيار وأمة الطير المجتمعة بالتسخير، فاتجه نظره إلى حقيقة الاختيار والتسخير، وقد ظهر من استخدام الآيات للوحدات الاجتماعية الإنسانية، أن الأمة تعتبر عن رباط فكري كما في الآيات التالية:

قال تعالى: (وَمَا كَانَ النَّاسُ إِلَّا أُمَّةً وَاحِدَةً فَاخْتَلَفُوا وَلَوْلَا كَلِمَةٌ سَبَقَتْ مِنْ رَبِّكَ لَفُضِيَ بَيْنَهُمْ فِيمَا فِيهِ يَخْتَلِفُونَ) (26)، أي كانوا متفقين في الفكر والموقف ثم اختلفوا فكراً⁽²⁷⁾.

وقوله تعالى: (كُنْتُمْ خَيْرَ أُمَّةٍ أُخْرِجَتْ لِلنَّاسِ تَأْمُرُونَ بِالْمَعْرُوفِ وَنَهَوْنَ عَنِ الْمُنْكَرِ وَتُؤْمِنُونَ بِاللَّهِ وَلَوْ آمَنَ أَهْلُ الْكِتَابِ لَكَانَ خَيْرًا لَهُمْ مِنْهُمْ الْمُؤْمِنُونَ وَأَكْثَرُهُمُ الْفَاسِقُونَ)⁽²⁸⁾، ومن الواضح الإشارة إلى البعد الفكري والمواقف المتجانسة ومثله قوله تعالى: (وَلَتَكُنْ مِنْكُمْ أُمَّةٌ يَدْعُونَ إِلَى الْخَيْرِ وَيَأْمُرُونَ بِالْمَعْرُوفِ وَيَنْهَوْنَ عَنِ الْمُنْكَرِ وَأُولَئِكَ هُمُ الْمُفْلِحُونَ)⁽²⁹⁾.

يتبين أن استخدام كلمة الأمة — هنا — يشير إلى جماعة متوحدة فكراً ومتميزة عقيدة وسلوكاً، فكل من جمعهم وطن أو فكر واحد فهم أمة واحدة حتى لو كان شخصاً واحداً متميزاً بفكره، كما في حال إبراهيم عليه السلام، الذي كان أمة في فكره وإيمانه.

وقد استخدم القرآن الكريم لفظ (القوم) بما يشير إلى جماعة ذات مواقف سلوكية معينة، لتصنيف الناس إلى (قوم مجرمين)⁽³⁰⁾، أو (قوم فاسقين)⁽³¹⁾، بغض النظر عن أعراقهم أو ألوانهم أو أجناسهم أو إقليمهم، وهذا هو الأكثر.

كما ورد ذكر لفظ (القوم) في مقابل لفظ (الأمة) بما يشير إلى جماعة ذات عرق مشترك أو إقليم مشترك، كما في قوله تعالى: (وَمِنْ قَوْمِ مُوسَى أُمَّةٌ يَهْدُونَ بِالْحَقِّ وَبِهِ يَعْدِلُونَ)⁽³²⁾، فقوم موسى من اشترك معهم في العرق وهم بنو إسرائيل، والأمة من قومه الذين تميزوا بسلوكهم ومواقفهم، وقد ورد ذكر (القوم) ويُقصد به جماعة جمعهم إقليم كما في قوله تعالى: (وَإِنْ يَكْذِبُوكَ فَقَدْ كَذَّبَتْ قَبْلَهُمْ قَوْمُ نُوحٍ وَعَادٌ وَثَمُودُ {42} وَقَوْمُ إِبْرَاهِيمَ وَقَوْمُ لُوطٍ)⁽³³⁾، وهذا هو الأمر الملحوظ في مفهوم القوم، فهم جماعة يُقيمون معاً في وطن أو؛ وقد يكون بينهم اختلافات فكرية أو عرقية. ووردت كلمة (شعب) بصيغة الجمع مرة واحدة في القرآن الكريم في قوله تعالى: (يَا أَيُّهَا النَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَاكُمْ مِنْ ذَكَرٍ وَأُنْثَى وَجَعَلْنَاكُمْ شُعُوبًا وَقَبَائِلَ لِتَعَارَفُوا إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِنْدَ اللَّهِ أَتْقَاكُمْ إِنَّ اللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ)⁽³⁴⁾، وقد اختلف المفسرون في تحديد المقصود بالشعوب والقبايل - هاهنا- فرواية عطاء عن ابن عباس: (أن الشعوب الموالى القبائل العرب، فبطون العجم شعوب وبطون العرب قبائل)، وفي رواية سفيان الثوري: (حمير كانوا ينتسبون إلى المخاليف (الجهات والأقاليم) شعب بينما ينتسب الحجازيون إلى القبائل)⁽³⁵⁾.

وهذا التقسيم يكشف عن الوحدات الاجتماعية التي سادت في موطن الجزيرة العربية، ففي جنوب الجزيرة العربية كان الانتساب للإقليم وهم الذين سماهم القرآن شعوباً، في حين كانت القبيلة هي الوحدة الاجتماعية في الحجاز.⁽³⁶⁾

تأسيساً على ما سبق يلحظ أن القرآن الكريم دعا إلى رابطة اجتماعية تستوعب في داخلها كل أشكال الترابط الاجتماعي التي عرفت الإنسانية، من رباط عرقي كالقبيلة والعشيرة أو رباط إقليمي كالشعب والقوم، لتلتقي هذه الروابط في إطار أكبر بحيث لا تكون هذه الروابط عوائق عن الوحدة في وطن واحد.

فبعد وصول الرسول ﷺ إلى المدينة المنورة وضع الميثاق المؤسس والمنظم للعلاقات السياسية داخل الدولة فيما عُرف بالصحيفة أو دستور المدينة.

ومن القضايا التي نظمتها الصحيفة موقف الدولة من اختلاف المنابت والأصول من ذلك النص: (هذا كتاب من النبي محمد (رسول الله) بين المؤمنين والمسلمين من قريش ويثرب ومن تبعهم فلحق بهم وجاهد معهم إنهم أمة واحدة من دون الناس...)، اعتبر الرسول - ﷺ - أن أساس (المواطنة) والانتماء لهذه الدولة هو الهجرة إليها، فعلى من يريد أن يكون مواطناً في مجتمع المدينة أن يهاجر إليها، لكي يتحقق في الموطن الذي يسكن في الدولة في الفقه الإسلامي رابطان أساسيان هما: الإيمان أولاً، والولاء للنظام المعمول به في الدولة ثانياً، أما الذين يفضلون التوطن خارج حدود الدولة فلا يعدون من مواطني الدولة لانقطاع الولاية، وإن لم يمنع من وجوب النصر عند تعرضهم للاضطهاد في الدين، والأصل في هذا قوله تعالى: (إِنَّ الَّذِينَ آمَنُوا وَهَاجَرُوا وَجَاهَدُوا بِأَمْوَالِهِمْ وَأَنْفُسِهِمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ وَالَّذِينَ آوَوْا وَنَصَرُوا أُولَئِكَ بَعْضُهُمْ أَوْلِيَاءُ بَعْضٍ وَالَّذِينَ آمَنُوا وَلَمْ يُهَاجِرُوا مَا لَكُمْ مِنْ وَلَايَتِهِمْ مِنْ شَيْءٍ حَتَّى يُهَاجِرُوا وَإِنْ اسْتَنْصَرُوكُمْ فِي الدِّينِ فَعَلَيْكُمْ النَّصْرُ إِلَّا عَلَى قَوْمٍ بَيْنَكُمْ وَبَيْنَهُمْ مِيثَاقٌ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ بَصِيرٌ)⁽³⁷⁾، فهذه الآية الكريمة تتوافق مع بنود

(دستور) الدولة المدينة الذي وضعه الرسول - ﷺ - بالمدينة بين (المؤمنين والمسلمين من قريش وأهل يثرب ومن تبعهم فلحق بهم وجاهد معهم) فالجزء الأول من الآية يذكر أن من يقطن خارج حدود الدولة الإسلامية يخرج عن دائرة (الولاية السياسية)، أما الجزء الثاني فيوضح دخولهم في دائرة الأخوة الدينية على الرغم من خروجهم عن دائرة الولاية السياسية.

نلاحظ أن الاسلام لم يجعل من اختلاف الأصول الجغرافية بين مهاجر وأنصاري عامل تفرقة أو تمييز، فالمؤمنون أمة واحد وهذه الرابطة مفتوحة لكل من تبعهم ولحق بهم واستعد لأداء الالتزامات الواجبة عليه وجاهد معهم، فقد استطاع النبي محمد رسول الله ﷺ من وضع كيان جامع وطن يسع الجميع . فالدولة في الإسلام هي المظهر لوحدة الجماعة، والفرد يجب عليه الانتساب للجماعة وعدم مفارقة الجماعة، وفي الحديث الذي يرويهِ ابن عباس رضي الله عنهما عن رسول الله ﷺ: (.. فإنه من فارق الجماعة شراً فمات فميتته ميتة جاهلية) (38).

إذن لا بد من التطابق بين وحدة الأمة ووحدة الدولة، وبناءً عليه يكون الانتماء للأمة الواحدة مطابقاً للانتماء للدولة الواحدة، وكل أفراد الأمة المقيمين في الوطن هم مواطنو الدولة الذين ينتسبون إليها، والشواهد لمبدأ وحدة الأمة كثيرة في القرآن الكريم منها قوله تعالى: (إِنَّ هَذِهِ أُمَّتُكُمْ أُمَّةً وَاحِدَةً وَأَنَا رَبُّكُمْ فَاعْبُدُونِ) (39)، وعن أبي موسى الأشعري رضي الله عنه قال: قال رسول الله ﷺ: (المؤمن للمؤمن كالبنيان يشد بعضه بعضاً) (40).

فالفقه الإسلامي العملي بين مضمون المواطنة كمصطلح من خلال بيان مضمونه باعتباره لازم من لوازم وجود الدولة، ووجود مواطنين يتبعون لهذه الدولة.

فالأخذ بوحدة مواطني الدولة في الفقه الإسلامي يؤكد ذلك وجوب الهجرة إليها على كل قادر ، لقوله تعالى: (إِنَّ الَّذِينَ تَوَفَّاهُمُ الْمَلَائِكَةُ ظَالِمِي أَنْفُسِهِمْ قَالُوا فِيمَ كُنْتُمْ قَالُوا كُنَّا مُسْتَضْعَفِينَ فِي الْأَرْضِ قَالُوا أَلَمْ تَكُنْ أَرْضُ اللَّهِ وَاسِعَةً فَتُهَاجِرُوا فِيهَا فَأُولَئِكَ مَأْوَاهُمْ جَهَنَّمُ وَسَاءَتْ مَصِيرًا) (41)، هذه الآية نزلت في قوم أسلموا ولم يهاجروا وخرجوا يوم بدر مع الكفار فقتلوا فبين الله أنه لا عذر لهم في ترك الهجرة (42)، ولم يستثن إلا الذين ذكرهم في الآية (إِلَّا الْمُسْتَضْعَفِينَ مِنَ الرِّجَالِ وَالنِّسَاءِ وَالْوِلْدَانِ لَا يَسْتَطِيعُونَ حِيلَةً وَلَا يَهْتَدُونَ سَبِيلًا) {98} فَأُولَئِكَ عَسَى اللَّهُ أَنْ يَعْفُو عَنْهُمْ وَكَانَ اللَّهُ عَفُوًّا غَفُورًا) (43).

وبناءً على ما سبق فإن المواطنة تنشئ حقوقاً سياسية كحق الإقامة في الدولة وغير ذلك من الحقوق فالحل فيها سواسية ما داموا مواطنين.

الناظر إلى الفقه الإسلامي يجد أن الإسلام لا يمنع الانتماء إلى وطن ما وقد عُرف من فقهاء الإسلام بالانتساب إلى أماكن جغرافية كالبصري والكوفي والدمشقي والقربي والنيسابوري... إلخ، ولما كانت دولة الخلافة قد تجزأت إلى دويلات وإمارات كالإخشيدية والحمدانية والسجلوقية... إلخ بيد أن المواطن ينتقل بين هذه الدول دون عقبات إلا ما يفرض من مكوس على التجار أو ما قد يكون من التحقق من شخصياتهم.

والدول الأوروبية — في العصر الحديث — فتحت لمواطنيها فرصة المواطنة أو جنسية

الاتحاد على الرغم من تعدد الدول والكيانات السياسية، حيث يستطيع الفرنسي الإقامة والاستثمار في إسبانيا أو بريطانيا دون عوائق بموجب الاتفاقيات التي عقدتها تلك الدول وصولاً إلى أوروبا المتحدة، لدواع اقتصادية على الرغم من اختلاف الثقافات وتعدد الأمم الأوروبية.

بهذا استطاعت أوروبا أن تنزع عن المواطن قيود السفر والعمل والإقامة، وأحوالها إلى أدوات تعارف تحقيقاً لما جاءت به الآية الكريمة في قوله تعالى: (يَا أَيُّهَا النَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَاكُمْ مِنْ ذَكَرٍ وَأُنْثَى وَجَعَلْنَاكُمْ شُعُوبًا وَقَبَائِلَ لِتَعَارَفُوا...).⁽⁴⁴⁾

إذا كانت الدول الأوروبية فعلت هذا فشعب الوطن الإسلامي أولى بإحياء فكرة المواطنة، في زمن لم يعد يسمح بمكانة للكيانات القطرية والطائفية الصغيرة الضيقة. خلاصة القول يتبين أن النبي ﷺ جمع جميع المواطنين في دولة المدينة لهدف أسمى وهو إبلاغ دعوة الحق لاسيما أن هذه الدعوة عالمية فلا يمكن إغلاقها في وجه من لم يؤمن ونحن مأمورون بالدعوة فلا يتم ذلك إلا من خلال وطن يسع الجميع ليدخلوا في دين الله أفواجاً، وليس كما يرى البعض أن ذلك يشكل تهديداً للجانب الاقتصادي أو الاجتماعي، فنموذج الهجرة إلى المدينة والرزق من الله. فقد عاش المسلمون مع غيرهم ممن خالفوهم في العقيدة، يشاركونهم الحياة المجتمعية في رابطة إنسانية نابعة من الإسلام، ذلك أن (دستور) المدينة يقرر (أن المواطنة في الدولة الإسلامية تتسع لتشمل غير المسلمين من أبناء الوطن الأصليين، وأولئك الذين يختارون أن ينضموا إلى جماعة الإسلام السياسية، فالمواطنة في الدولة الإسلامية الأولى لم تنحصر في المسلمين وحدهم، بل امتدت لتشمل اليهود المقيمين في المدينة، واعتبرتهم (الوثيقة) من مواطني الدولة — أمة مع المؤمنين — وحددت ما لهم من الحقوق ما عليهم من الواجبات. فاختلاف الدين ليس، بمقتضى أحكام (الصحيفة) سبباً للحرمان من مبدأ المواطنة، كما كان ذلك مطبقاً في الدول التي عاصرت الدولة الإسلامية في بدء تكوينها، والمواطنة لا تساوي الانتماء الديني دائماً، بل يمكن أن تفترق عنه حين يكون المجتمع السياسي مكوناً من فئات ذات انتماء ديني متنوع، وقد يتساويان كما في حال وجود مجتمع ذي انتماء ديني واحد، فيلتقي مفهوم الأمة مع مفهوم الدولة (والمواطنة)، كما هو الحال في (الصحيفة) التي تعالج علاقات الأمتين الإسلامية وغير المسلمة، فهي لم تحرم حق المواطنة على غير المسلمين، ما داموا يقومون بالواجبات المترتبة عليهم كالدفاع عن المدينة مع المؤمنين بالنفس والمال في حال تعرضها لعدوان خارجي يهدد أمنها واستقرارها.⁽⁴⁵⁾

فقدان المواطنة في الفقه الإسلامي

المواطنة أداة أو صفة للتعبير عن انتساب الفرد إلى دولة معينة، وهذا الانتساب يعني قيام رابطة قانونية وسياسية بين الفرد والدولة.

هذا المفهوم للمواطنة عرفه الفقه الإسلامي ولم يُطلق عليه الفقهاء مصطلح الجنسية، والدليل على ذلك أن الدولة الإسلامية دولة دعوة في إقامتها ودولة في واقعها الفعلي، حيث توفرت فيها العناصر الأساسية لقيام الدولة من شعب وإقليم وحكومة.

فأفراد الشعب في الفقه الاسلامي يُوصفون بأنهم من مواطنين، يرتبطون بالدولة ارتباطاً خاصاً لا يشبه ارتباط الفرد بالفرد، لأن الدولة في الفقه الإسلامي ليست فرداً وإنما هي منظمة سياسية، فلا تشبه ارتباط الفرد بالأمة لأن الأمة وإن لم تكن فرداً إلا أنها ليست منظمة سياسية. فرابطة أفراد الشعب في الفقه الإسلامي هي رابطة سياسية وقانونية لها آثار شرعية تنتج عنها ويلتزم بها الفرد والدولة، وهذه الآثار هي الحقوق التي يتمتع بها الفرد في ظل الدولة، والواجبات التي يلتزم بها قبلها ومن هذه الحقوق، الحقوق العامة والحقوق السياسية ومن التزامات نحوها، التكاليف المالية وقد ذكر الفقهاء — ايضاً — الأحوال التي تنفصم فيها هذه الرابطة بين الفرد والدولة مثل ردة المسلم ومخالفة غير المسلم لما يجب ان يلتزم به. بهذا، فإن الفقه الإسلامي تناول مفهوم المواطنة التي هي رابطة بين الفرد والدولة وكيفية اكتسابها وفقدانها كنتيجة حتمية لوجود الدولة التي تحرص على إقامتها وبقائها رغم أن الفقهاء لم يسموا هذه الرابطة بمصطلح الجنسية، فعدم التسمية لا يعني عدم وجود هذه الرابطة بين الفرد والدولة الإسلامية.⁽⁴⁶⁾

فالارتباط بالأمة الإسلامية يعتبر من قبيل الروابط الاجتماعية لا السياسية، لأن الأمة وحدة اجتماعية، حيث إن الفقه الإسلامي لا يرضى أن يبقى المسلمون — فقط — أمة وإنما يدعوهم إلى التحول إلى تنظيم سياسي، أي هيئة سياسية لتحقيق أغراض الإسلام كما ينبغي، وتنفيذ أحكام الإسلام وهذا لا يتأتى إلا بوجود سلطة سياسية عليا أو ما يسمى بالحكومة التنفيذية.

وتنفصم — تفقد — هذه الرابطة بالخروج من هذا الدين ففي الحديث عن أبي هريرة رضي الله عنه أخبره أن رسول الله ﷺ قال: (أمرت أن أقاتل الناس حتى يقولوا لا إله إلا الله فمن قال: لا إله إلا الله عصم مني ماله ونفسه إلا بحقه وحسابه على الله) فبعد أن وفاة رسول الله - ﷺ وانتقاله إلى الرفيق الأعلى استخلف أبوبكر الصديق رضي الله عنه بعده، وكفر من كفر من العرب قال عمر بن الخطاب لأبي بكر كيف تقاتل الناس وقد قال رسول الله ﷺ: (أمرت أن أقاتل الناس حتى يقولوا لا إله إلا الله فمن قال: لا إله إلا الله عصم مني ماله ونفسه إلا بحقه وحسابه على الله) فقال أبوبكر: (والله لاقتلن من فرق بين الصلاة والزكاة، فإن الزكاة حق المال والله لو منعوني عقلاً كانوا يؤدونه إلى رسول الله ﷺ لقاتلتهم على منعه، فقال عمر بن الخطاب: (فو الله ما هو إلا أن رأيت الله عز وجل قد شرح صدر أبي بكر للقتال فعرفت أنه على حق).⁽⁴⁷⁾

فالرجوع عن الإسلام، أي ترك التصديق به والرجوع يكون بأحد طرق ثلاثة: بالفعل أو بالامتناع عن الفعل وبالقول وبالاعتقاد.

والرجوع عن الإسلام بالفعل يحدث بإتيان أي فعل يحرمه الإسلام إذا استباح الفاعل إتيانه سواء أتاه متعمداً أو أتاه استهزاء بالإسلام واستخفافاً أو عناداً ومكابرة، أن الردة هي الرجوع عن

دين الإسلام ومفارقة جماعة المسلمين بعد أن كان عضواً فيها، والدين الإسلامي يحث على وحدة الجماعة وعدم الخروج عن الجماعة وبعد أن هاجر النبي ﷺ إلى المدينة قام ببناء الدولة على وحدة الجماعة.

بهذا، فإن الإسلام دين ووطن للجميع فالمسلم إذا خرج عن جماعة المسلمين بترك دين الإسلام ومفارقة الجماعة سواء كان بالفعل أو القول، فإن هذا السلوك لا يسقط عنه صفة انتسابه لهذا للدولة فهو مواطن ولكن يوجب عليه عقوبة في الدنيا والآخرة لقوله تعالى: (...وَمَنْ يَرْتَدِدْ مِنْكُمْ عَنْ دِينِهِ فَيَمُتْ وَهُوَ كَافِرٌ فَأُولَئِكَ حَبِطَتْ أَعْمَالُهُمْ فِي الدُّنْيَا وَالْآخِرَةِ وَأُولَئِكَ أَصْحَابُ النَّارِ هُمْ فِيهَا خَالِدُونَ)⁽⁴⁸⁾، أما المواطن غير المسلم إذا خرج عن التزامه بالواجبات والواجبة عليه بالمواطنة والمتمثل في احترام الإسلام ومبادئه وعدم الإساءة إلى الرسل فإن ذلك لا يسقط عنه المواطنة وإنما يوجب عليه العقوبة، فالدولة الإسلامية تعاقب من خالف مبادئ الإسلام سواء كان مسلم أو غير مسلم ولا تسقط عنه المواطنة (الجنسية)، خلافاً لما نراه من إسقاط للجنسية في القوانين الوضعية فيصبح الشخص بدون جنسية.

الخاتمة والنتائج والتوصيات:

الحمد الذي خلق الخلق من أصل واحد وفضلهم على سائر الحيوانات وجعلنا شعوباً وقبائل لتعارف وأمر بالعدل والمساواة بين البشرية بمختلف ألوانهم ومعتقداتهم وعاداتهم، والصلاة والسلام على نبي الإنسانية والرحمة والعدالة والمساواة التي شهد له بها الأعداء.

النتائج:

1. التكليف الفقهي للمواطنة يقوم على أساس ضرورة وحدة الأصل الإنساني والمصالح المشتركة والمساواة والعدالة بين كيانات المجتمع.
2. تعتبر الدولة في الفكر السياسي الإسلامي الحاضنة لجميع الشعب والرعاية لمصالحهم بمختلف أفكارهم ومعتقداتهم وفق الضوابط الشرعية دون إفراط أو تفريط أو اعتداء على المعتقد.
3. تعتبر وثيقة المدينة الأساس الذي احتوى على المبادئ الأساسية للدولة وأركانها.
4. المواطنة في الفقه الإسلامي تكتسب ولا تنزع ولا تسقط وإنما يقرر في حالة المخالفة عقوبة بحسب الجرم عكس الجنسية التي يتم سحبها ويصبح بدون جنسية.
5. مصطلح المواطنة في الفكر السياسي الإسلامي مصطلح يسع الجميع من حيث ارتباطه بالأساس والمشار التي تنعكس على سلوك المواطن خلافاً لمفهوم الجنسية.

التوصيات:

1. على مراكز البحث العلمي إعادة قراءة السياسة الشرعية بما يتوافق مع المتغيرات وفق مقاصد الشريعة.
2. على جهات الاختصاص التشريعية استبدال مصطلح الجنسية بالمواطنة لما يحققه من رتق للنسيج الاجتماعي.
3. نوصي الجامعات بتدريس الفكر السياسي الإسلامي مقارنة بالفكر غير الإسلامي.
4. نوصي بدراسات متعمقة للموضوع المواطنة والجنسية والهوية وذلك لما يمثله من أهمية لاستقرار.

المصادر والمراجع:

- (1) معجم العين، أبو عبد الرحمن، الخليل بن أحمد بن عمرو بن تميم الفراهيدي، المحقق د. مهدي المخزومي، د. إبراهيم السامرائي، دار ومكتب الهلال، ج1، ص55.
- (2) التعريفات، علي بن محمد بن علي الزين الشريف الجرجاني، ط الأولى، 1402هـ — 1983م، دار الكتب العلمية بيروت لبنان، ص78.
- (3) القاموس المحيط، الفيروز آبادي، مجد الدين أبوطاهر محمد بن يعقوب، ط الثامنة، 1426هـ-2005م - مؤسسة الرسالة بيروت لبنان، ص537.
- (4) معجم اللغة العربية المعاصرة، د. أحمد مختار عبد الحميد عمر، ط الأولى 1429هـ — 2008م، ج1، عالم الكتب، ص404-406.
- (5) الدولة القومية، دراسة تحليلية مقارنة، سليمان صالح الغويل، ط الرابعة، جامعة قاريونس بغازي، ليبيا، 1990م، ص16-17 وص240.
- (6) الشيخ محمود شلتوت والشيخ أبوزهرة، والشيخ محمد ناصر الدين الألباني، والشيخ سيد قطب.
- (7) مجلة العربي، بحث بعنوان (هل هنالك تعارض بين الوطنية والدين)، المستشار محمد سعيد العشماوي، العدد، سبتمبر 1998م، وزارة الإعلام دولة الكويت، ص30 وما بعدها.
- (8) نظرية الجنسية، عبد الحكيم مصطفى عبد الرحمن المنفلوطي (دكتور) القاهرة، مكتبة النصر 1991م، ص27 وما بعدها.
- (9) القانون الدولي الخاص، حسن الهدي (دكتور) وغالب علي الداودي (دكتور)، القسم الأول، ط1، دار الكتب الوصل، 1988م، ص37.
- (10) المرجع السابق.
- (11) المرجع السابق.
- (12) لسان العرب، ابن منظور، دار إحياء التراث العربي، بيروت، 338/15.
- (13) التعريفات للجرجاني، ص327.
- (14) مختار الصحاح، الرازي، ص728.
- (15) أهل الذمة في النظام الحقوقي الإسلامي رؤية إسلامية، أ.د. محمد سليم العوا، مجلة الحياة الطيبة، العدد 11 سنة 2003م، ص182.
- (16) راجع إعادة النظر في المفهوم التقليدي للجماعة السياسية في الإسلام، د. عبد الوهاب الأفندي مسلم أم مواطن من كتاب المواطنة والديمقراطية في البلدان العربية، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت، 2001م، ص61. المسلمون والأقباط في إطار الجماعة الوطنية، كلام الدين والسياسة، طارق البشري، دار الشروق، القاهرة 2004م، ص45، نظرية الإسلام وهدية السياسة والقانون والدستور، دمشق، دار الفكر، 169م، ص298.

- (17) الموسوعة العربية العالمية، مؤسسة أعمال الموسوعة للنشر والتوزيع، الرياض، ط 1996م، 311.
- (18) موسوعة العلوم الاجتماعية، ميشيل مان، تعريف عادل الهواري، سعد مصلوح، مكتبة الفلاح، الكويت، طبعة 1984م، ص110.
- (19) المواطنة حقوق وواجبات، سعيد عبدالحافظ، 2007م، مركز للدراسات الحقوقية والدستورية، القاهرة، ص10.
- (20) سورة النساء، الآية (66)
- (21) سورة الحجرات، الآية (13).
- (22) سورة آل عمران، الآية (103)
- (23) وثيقة المدينة المضمون والدلالة، أحمد قائد محمد الشعبي، كتاب الأمة العدد 110، بحث منشور بتاريخ 2005م، ص30 وما بعدها.
- (24) مجموعة الوثائق السياسية للعهد النبوي والخلافة الراشدة، مرجع سابق، ص57 وما بعدها.
- (25) مفردات القرآن الكريم، الراغب الأصفهاني، تحقيق صفوي داوودي، ط الأولى 1992م، دار القلم، ص86.
- (26) سور يونس، الآية 19.
- (27) مفردات ألفاظ القرآن الكريم، الراغب الأصفهاني، مرجع سابق، ص86.
- (28) سورة آل عمران، الآية 110.
- (29) سورة آل عمران، الآية 104.
- (30) سورة الدخان، الآية 22.
- (31) سورة التوبة، الآية 96.
- (32) سورة الأعراف، الآية 159.
- (33) سورة الحج، الآيتان: 42 و 43.
- (34) سورة الحجرات، الآية 13.
- (35) تفسير القرآن العظيم، ابن كثير، دار المعرفة، ج4، ص217.
- (36) السلطة في الإسلام، مفهوم الأمة والجماعة والسلطة، رضوان السيد، دار المقاصد بيروت 1985م، ص27.
- (37) سورة الأنفال الآية (72).
- (38) صحيح الإمام مسلم، مسلم بن الحجاج أبو الحسن القشيري النيسابوري، تحقيق محمد فؤاد عبد الباقي، دار إحياء التراث العربي بيروت، ج3، ص1477، باب الأمر بلزوم الجماعة.
- (39) سورة الأنبياء، الآية 92.

- (40) صحيح الإمام مسلم، مرجع سابق، ج4، ص1999، باب تراحم المؤمنين وتعاطفهم وتعاضدهم.
- (41) سورة النساء، الآية 97.
- (42) نهاية المحتاج إلى شرح المنهاج، الرملي، شمس الدين محمد بن أبي العباس أحمد بن حمزة شهاب الدين، دار الفكر بيروت، ط1984م، ج8، ص82.
- (43) سورة النساء، الآيتان: 98 و99.
- (44) سورة الحجرات، الآية 13.
- (45) وثيقة المدينة المضمون والدلالة، مرجع سابق، ص40 وما بعدها.
- (46) أحكام الذميين والمستأمنين في الإسلام، عبد الكريم زيدان، مرجع سابق، ص62.
- (47) صحيح مسلم، مرجع سابق، ج1، ص51 وما بعدها.
- (48) سورة البقرة، الآية 217.

حياة المهاجرين والأنصار في المدينة المنورة بعد الهجرة النبوية الشريفة

أ. مشارك - قسم التاريخ - كلية التربية -
جامعة القضايف

محاضر - كلية التربية - جامعة شندي

د. عبد المنعم يوسف عبد الحفيظ الزبير

أ. أبو بكر علي مصطفى جلال الدين

المستخلص :

جاءت هذه الدراسة بعنوان حياة المهاجرين والأنصار في المدينة المنورة بعد الهجرة النبوية الشريفة فقد شكلت معاهدة المؤاخاة بين المهاجرين والأنصار الوعاء الأكبر الذي جمع بينهما، كما أن وثيقة المدينة أصبحت تشكل الإطار القانوني لحياتهم داخل المدينة، وأصبح المهاجرون والأنصار أهم عناصر المجتمع في مدينة رسول الله (ﷺ) بعد الهجرة، وأصبح مجتمع المدينة كالجسد الواحد في تماسكه واجتهاد المسلمون في الدفاع عن المدينة المنورة ونشر الدعوة الإسلامية. تهدف الدراسة للتعرف على أسباب الهجرة ودوافعها وأهم المراحل التي تمت بها، كما تهدف لمعرفة المهاجرين الأوائل من المسلمين، ومنازل المهاجرين بالمدينة، والاطلاع على بطون الأنصار من الأوس والخزرج ومكانة الأنصار ومناقبتهم. اتبعت الدراسة المنهج التاريخي والوصفي التحليلي وتوصلت الدراسة لنتائج مهمة منها أن المسلمين هاجروا من مكة فراراً بدينهم، كانت الهجرة إلى يثرب بعد بيعتي العقبة الأولى والثانية، أصبحت المدينة المنورة مقراً ومركزاً للدعوة الإسلامية.

Abstract :

This study came under the title of the life of immigrants and Ansar in Medina after the noble Prophet's migration. The treaty of brotherhood between the immigrants and the Ansar formed the largest container that brought them together, just as Al Medina Document became the legal framework for their lives inside Medina, and the immigrants and supporters became the most important elements of society in The city of the Messenger of God (may God bless him and grant him peace) after the emigration, and the community of Medina became like one body in its cohesion, and Muslims worked hard to defend Medina and spread the Islamic call. The study aims at identifying the causes of migration, its motives

and the most important stages in it. It also aims to find out the first of the emigrants from the Muslims, the houses of the immigrants in the Medina, and view the relations of the Ansar from Al-Aws and Al-Khazraj, their status and their virtues. The study followed the historical and analytical descriptive method. The study concluded that important results were that the Muslims migrated from Mecca to flee their religion. The migration to Yathrib after the treaties of the first and second Aqaba ; the Medina became the center of the Islamic da'wa.

المقدمة :

لما اشتد كفار قريش في تعذيب المسلمين بمكة، وتفننوا في إيذاهم فلم يراعوا فيهم قرابة ولا رحماً، وتخطوا حدود الإنسانية وكان اضطهادهم لهم يزداد ضراوة يوماً بعد يوم، حتى ضاق بالمسلمين المقام في مكة، وأخذوا يفكرون في حيلةٍ تُنجيهم من العذاب الأليم والاضطهاد الكبير من مشركي قريش⁽¹⁾.

وفي هذه الظروف الصعبة كانت سورة الزمر قد نزلت بمكة، وفيها إشارة إلى الهجرة من أرض الكفر عند خشية الفتنة، وقد أعلنت أن أرض الله ليست ضيقة، وقد ورد ذلك في قوله: (لِّلَّذِينَ أَحْسَنُوا فِي هَذِهِ الدُّنْيَا حَسَنَةٌ وَأَرْضُ اللَّهِ وَاسِعَةٌ إِنَّمَا يُوَفَّى الصَّابِرُونَ أَجْرَهُمْ بِغَيْرِ حِسَابٍ)⁽²⁾ وأيضاً قوله تعالى (إِنَّ الَّذِينَ تَوَفَّاهُمُ الْمَلَائِكَةُ ظَالِمِي أَنْفُسِهِمْ قَالُوا فِيمَ كُنْتُمْ قَالُوا كُنَّا مُسْتَضْعَفِينَ فِي الْأَرْضِ قَالُوا أَلَمْ تَكُنْ أَرْضُ اللَّهِ وَاسِعَةً فَتُهَاجِرُوا فِيهَا فَأُولَئِكَ مَأْوَاهُمْ جَهَنَّمُ وَسَاءَتْ مَصِيرًا * إِلَّا الْمُسْتَضْعَفِينَ مِنَ الرِّجَالِ وَالنِّسَاءِ وَالْوِلْدَانَ لَا يَسْتَطِيعُونَ حِيلَةً وَلَا يَهْتَدُونَ سَبِيلًا * فَأُولَئِكَ عَسَى اللَّهُ أَنْ يَعْفُوَ عَنْهُمْ وَكَانَ اللَّهُ عَفُوًّا غَفُورًا)⁽³⁾.

بداية الهجرة:

كانت الهجرة الأولى إلى الحبشة، حيث أمر النبي ﷺ بالهجرة إليها وذلك لأن بها ملكاً عادل لا يظلم عنده أحد أبداً، وذلك بعد أن اشتد البلاء على أصحابه بمكة، فيما روى عن النبي ﷺ أنه قال: «لو خرجتم إلى أرض الحبشة، فإن بها ملكاً لا يُظلم عنده أحد، وهي أرض صدق، حتى يجعل الله لكم فرجاً مما أنتم فيه»⁽⁴⁾ أخرجه البيهقي، وكانت أول هجرة للمسلمين فراراً بدينهم إلى أرض الحبشة، وذلك في شهر رجب من السنة الخامسة للبعثة النبوية الشريفة، وكان عدد المهاجرين أحد عشر رجلاً وأربع نسوة، وأول من خرج من مكة هو عثمان بن عفان (رضي الله عنه) وزوجته رقية بنت النبي ﷺ⁽⁵⁾.

عاد المسلمون الذين هاجروا إلى الحبشة بعد أن سمعوا أخباراً تقول أن قريشاً أسلمت، وتفاجئوا بعد رجوعهم إلى مكة بعدم صدق الأخبار التي وصلتهم ووجدوا نفس القسوة والتعذيب من كفار قريش، فقرروا الهجرة إلى الحبشة مرة أخرى، وكانت تلك هي الهجرة الثانية وبلغ

عددهم ثلاثة وثمانون رجلاً من ضمنهم عمار بن ياسر رضي الله عنهم وثمانية امرأة (رضي الله عنهم أجمعين)⁽⁶⁾.

بعد دخول الأنصار في الإسلام عند وفودهم إلى مكة في موسم الحج في السنة الحادية عشرة من البعثة المحمدية، فكانت بيعة العقبة الأولى وبعد رجوع وفد الأوس والخزرج إلى يثرب انتشر أمر الإسلام في أهل يثرب ثم رجعوا في العام المقبل أي الثاني عشر للبعثة النبوية الشريفة، فكانت بيعة العقبة الثانية، فبعث معهم الرسول ﷺ مصعب بن عمير (رضي الله عنه) ليعلمهم القرآن الكريم ويدعو إلى الله، وبذلك أصبحت المدينة مقراً ومركزاً للدعوة الإسلامية.

وكان أول المهاجرين من مكة إلى المدينة كان هو مصعب بن عمير (رضي الله عنه)⁽⁷⁾، ثم لحق به عبد الله بن أم مكتوم⁽⁸⁾ وكانت مهمتهما الدعوة إلى دين الله والتبشير بمبعث رسوله الكريم ﷺ. ثم وفد الأنصار مرة أخرى إلى مكة بينهم عدد وفيهم من لم يسلم بعد يتزعمهم البراء ابن معرور، فأخذ بيد رسول الله ﷺ وقال: والذي بعثك لنضعك مما نضع منه أزرنا⁽⁹⁾، فتمت البيعة بالعقبة، وبعدها تدفق المسلمون من أهل مكة أفراداً وجماعات مهاجرين إلى يثرب بعد أن أذن لهم النبي ﷺ بذلك⁽¹⁰⁾.

وكان النبي ﷺ قد رأى في منامه أنه هاجر من مكة إلى أرض بها نخل، فذهب ظنه إلى أنها اليمامة أو هجر⁽¹¹⁾، ثم استبان له ﷺ بعد أنها المدينة فقال: «أريت دار هجرتكم ذات نخلة بين لابتين»⁽¹²⁾ «أخرجته البخاري»⁽¹³⁾.

فأخبر النبي ﷺ أصحابه و كان مسروراً بهذا الأمر ، فقال لهم : «قد رأيت دار هجرتكم وهي يثرب، فمن أراد أن يخرج فليخرج إليها، إن الله عز وجل قد جعل لكم إخواناً وداراً تأمنون بها، وقد صادف هذا الإذن بالهجرة إلى يثرب هوى في أنفسهم، فخرجوا إليها أرسالاً⁽¹⁴⁾ وفرداً، ومنهم من خرج مستعلاً كالفاروق عمر بن الخطاب، ومنهم من خرج مستخفياً وهم الضعفاء والموالي، و قد رجع الكثيرون ممن هاجر إلى الحبشة رجعوا إلى الحجاز واستقروا بالمدينة فكانوا أصحاب هجرتين»⁽¹⁵⁾.

المؤاخاة بين المهاجرين والأنصار :

عقد النبي ﷺ الإلفة والمؤاخاة بين المهاجرين والأنصار بالكتاب الذي أمر به فكتب بينهم المؤاخاة التي أمرهم بها وقرهم عليها ويقول الإمام أنس بن مالك في ذلك أن النبي ﷺ «قد حالف بين قريش أي المهاجرين والأنصار أي الأوس والخزرج في داري» يقصد منزله⁽¹⁶⁾.

وقد أورد ابن اسحاق نص عهد المؤاخاة بين المهاجرين والأنصار قائلاً: «أخى رسول الله ﷺ بين أصحابه من المهاجرين والأنصار، فقال، فيما بلغنا ونعوذ بالله أن نقول عليه ما لم يقل: «تأخوا في الله أخوين أخوين، ثم أخذ بيد علي بن أبي طالب فقال: هذا أخي في الدنيا والآخرة، فكان رسول الله ﷺ سيد المرسلين وإمام المتقين ورسول رب العالمين الذي ليس له نظير من العباد، وعلي بن أبي طالب رضي الله عنه أخوين، وكان حمزة بن عبد المطلب وزيد بن حارثة مولى النبي الكريم أخوين، وجعفر الطيار بن أبي طالب ومعاذ بن جبل أخوين، وأبو بكر الصديق وخارجه

بن زيد الخزرجي أخوين، وعمر بن الخطاب وعُتبان بن مالك أخوين، وأبو عبيدة بن الجراح وسعد بن معاذ أخوين، وعبد الرحمن بن عوف وسعد بن الربيع أخوين، والزبير بن العوام وسلمه بن سلامه بن وقش أخوين، ويقال إن ابن العوام وعبد الله بن مسعود أخوين، وعثمان بن عفان وأوس بن ثابت بن المنذر النجاري أخوين، ومصعب بن عمير وأبو أيوب الأنصاري أخوين، وأبو حذيفة بن عتبة وعبد بن بشر أخوين، وعمار بن ياسر وحذيفة بن اليمان العبسي حليف بني عبد الأشهل أخوين، وحاطب بن أبي بلتعة وعويم بن ساعدة أخوين، وسلمان الفارسي وأبو الدرداء أخوين، وبلال بن رباح وأبو رويحة عبد الله بن عبد الرحمن الخثعمي أخوين، وأبي ذر برید بن جنادة والمنذر بن عمرو أخوين»⁽¹⁷⁾ رضي الله عنهم أجمعين.

وقد تمسك الصحابة رضوان الله عليهم بهذه المؤاخاة التي عقدها بينهم الرسول ﷺ حتى بعد وفاته، حيث قال عمر بن الخطاب لبلال بن رباح عندما دون الدواوين بالشام في فترة خلافته رضي الله عنهما، وكان بلال قد خرج إلى الشام، فأقام بها مجاهداً، فقال عمر لبلال: إلى من تجعل ديونك يا بلال؟ فقال بلال: مع أبي رويحه وهو أخوه من الأنصار الذي خاوى بينهما النبي الكريم، لا أفارقه أبداً، للأخوة التي كان الرسول ﷺ عقد بيني وبينه، فضم إليه، وهذا دليل على تمسك الصحابة واحترامهم للقوانين التي وضعها الإسلام والنبي الكريم عليه السلام⁽¹⁸⁾.

صحيفة المدينة (دستور المدينة):

بعد أن قام الرسول ﷺ بعقد المؤاخاة بين المسلمين من المهاجرين والأنصار قام بتنظيم معاهدة أزاح بها كل ما كان من حزازات الجاهلية والنزاعات القبلية، ولم يترك مجالاً لتقاليد الجاهلية، وبهذه الحكمة النبوية الشريفة أرسى رسول الله ﷺ قواعد جديدة للمجتمع بالمدينة، وكانت لهذه المعاهدة أثراً للمعاني التي كان يتمتع بها أولئك الأماجد بفضل صُحبة النبي ﷺ وسميت هذه المعاهدة التي شملت جميع عناصر المجتمع المدني الشريف من مهاجرين وأنصار ويهود بالصحيفة التي من خلالها أسس الرسول ﷺ قواعد وأنظمة حكم لدولته الجديدة بالمدينة المنورة⁽¹⁹⁾.

أعلن الرسول ﷺ هذا الميثاق بعدما أوحى الله تعالى إليه به، قال تعالى: {وَمَا يَنْبَغُ عَنِ الْهَوَىٰ} (*) إِنَّهُ هُوَ إِلَّا وَحْيِي يُوحَىٰ (*)⁽²⁰⁾ صدق الله العظيم، فلم يشاور أحداً من سكان المدينة فيه ولا حتى المهاجرين، فهو تشريع خالص من الله تعالى، ملزم لسكان المدينة كافة وأجمعين⁽²¹⁾.

«أن المدينة حرام جوفها، كحرمة مكة، وقد اتفق جمهور العلماء على أن المدينة حرم، يحرم صيدها وقطع شجرها⁽²²⁾، وقد استدلووا بحديث عن أبي هريرة رضي الله عنه أن النبي ﷺ قال: «إن إبراهيم حرم مكة، وإني حرمت المدينة مثلما حرم إبراهيم مكة، لا ينفر صيدها ولا يعضد شجرها، ولا يختلى خلاها، لا تحل لقطتها إلا لمنشد»⁽²³⁾ أخرجه البخاري.

المهاجرون :

وكان أول من هاجر من العائدين من الحبشة أبو سلمة ⁽²⁴⁾ بن عبد الأسد، وذلك بعد أن بلغه إسلام من أسلم من أهل المدينة، و بعد أن أذن النبي ﷺ لأصحابه بالهجرة، خرج بزوجه أم سلمة وابنه سلمه، وهو يقود بهما بعيره، فعلم به بني المغيرة بن عبد الله المخزومي وهم عشيرة زوجته أم سلمه قاموا إليه فقالوا: هذه نفسك قد غلبتنا عليها، أ رأيت صاحبك هذه؟ علام نترك تسير بها في البلاد، فنزعوا خطام البعير من يده، وانتزعوها منه، فغضب عن ذلك بنو عبد الأسد - رهط أبي سلمه - فقالوا: والله لا نترك ابننا عندكم إن نزعتموها من صاحبنا، فتجاذبوا الغلام فيما بينهم حتى خلعت يده، وانطلق به بنو عبد الأسد، أما أم سلمه فقد حبسها أهلها بنو المغيرة عندهم، ومع كل هذا انطلق أبو سلمه إلى الله مهاجراً، ولم يلو على أهل ولا ولد ولا مال حتى وصل إلى قباء بأطراف المدينة، فأقام بها حتى وصلت إليه زوجته وابنه بعد أن أطلق سراحها بعام من هجرته ⁽²⁵⁾.

قدم عامر بن ربيعة ⁽²⁶⁾ حليف بني عدي بن كعب ومعه زوجته ليلى بنت أبي حثمة، وكان قدومهما بعد هجرة أبي سلمه، وقال أن ليلى بنت أبي حثمة هي أول طعينة ⁽²⁷⁾ قدمت المدينة ولولا منع أم سلمة الهجرة من قبل أهلها بني المغيرة لكانت هي أول طعينة قدمت المدينة من المسلمين ⁽²⁸⁾.

ثم تتابع المسلمين سراعاً إلى الهجرة فهاجر بلال بن رباح وسعد بن أبي وقاص - رضي الله عنهم - روى البخاري في صحيحه بسنده عن البراء بن عازب قال: «أول من قدم علينا من أصحاب الرسول ﷺ مصعب بن عمير ثم عمرو بن أم مكتوم، فجعلنا يقرئنا القرآن ثم جاء عمار بن ياسر وبلال بن رباح وسعد بن أبي وقاص، ثم جاء عمر بن الخطاب في عشرين (رضي الله عنهم جميعاً) ، ثم جاء النبي ﷺ، فلما رآه أهل المدينة فرحوا بقدومه فرحاً شديداً، حتى رأيت الولائد ⁽²⁹⁾ والصبيان يقولون: هذا رسول الله ﷺ قد جاء ⁽³⁰⁾.

لم تكن هجرة المسلمين من مكة إلى المدينة هينة سهلة تسمح بها قريش، وتطيب بها نفساً، بل كانوا يضعون العراقيل في سبيل الانتقال من مكة إلى المدينة، ويمتحنون المهاجرين أنواع من المحن، وكان المهاجرين لا يعدلون عن هذه الفكرة لا يؤثرون البقاء في مكة، وهم يعلمون أن معنى الهجرة اهدار المصالح والتضحية بالأموال، والنجاة بالشخص فحسب، مع الإشعار بأنه مُستباح منهوب، قد يهلك في أوائل الطريق أو نهايتها وبأنه يسير نحو مستقبل مُبهم، لا يدري ما يتمخض عنه من قلقايل وأحزان ⁽³¹⁾.

هاجر عمر بن الخطاب ﷺ ومعه أخيه زيد بن الخطاب، ومباشر بن أبي ربيعة، وطلحة بن عبيد الله، وصهيب الرومي، ثم زيد بن حارثة، وأبو مرثد كنان بن الحصين ⁽³²⁾، وابنه مرثد بن أبي مرثد، أبو كبشة ⁽³³⁾، وعبيدة بن الحارث وأخواه ⁽³⁴⁾، الطفيل وحصين ⁽³⁵⁾، ومسطح بن أثاثة وسُويط، وعبد الرحمن بن عوف، والزبير بن العوام، وأبو حذيفة بن عتبة، ومولاه سالم ⁽³⁶⁾، وعتبة بن غزوان، وعثمان بن عفان رضي الله عنهم أجمعين، حتى لم يبق معه ﷺ بمكة إلا علي بن أبي طالب وأبي بكر الصديق رضي الله عنهم أجمعين ⁽³⁷⁾.

لم يمض أكثر من شهرين على بيعة العقبة الثانية حتى لم يبق بمكة من المسلمين إلا رسول الله ﷺ وأبو بكر الصديق وعلي بن أبي طالب رضي الله عنهم أجمعين، ولم يكن معهم إلا من كان محبوباً أو مريضاً أو ضعيفاً عن الخروج للهجرة⁽³⁸⁾.

وكان الصديق كثيراً ما يستأذن رسول الله في الهجرة، فيقول له ﷺ: «لا تعجل لعل الله يجعل لك صاحباً» فيطمع أبو بكر أن يكون رسول الله ﷺ هو صاحب⁽³⁹⁾.

ثم أذن الله تعالى لنبيه ﷺ بالهجرة، بعد نزول قوله تعالى (وَقُلْ رَبِّ أَدْخِلْنِي مَدْخَلَ صِدْقٍ وَأَخْرِجْنِي مَخْرَجَ صِدْقٍ وَاجْعَلْ لِي مِنْ لَدُنْكَ سُلْطَانًا نَصِيرًا)⁽⁴⁰⁾ صدق الله العظيم، وقد نجى الله نبيه ﷺ من مكر المشركين بمكة حيث أرادوا قتله، قال تعالى (وَإِذْ يَمْكُرُ بِكَ الَّذِينَ كَفَرُوا لِيُثْبِتُوكَ أَوْ يَقْتُلُوكَ أَوْ يُخْرِجُوكَ وَيَمْكُرُونَ وَيَمْكُرُ اللَّهُ وَاللَّهُ خَيْرُ الْمَاكِرِينَ)⁽⁴¹⁾ صدق الله العظيم، فأمر رسول الله ﷺ علي بن أبي طالب أن يبيت على فراشه ليلة الهجرة، وخرج هو بصحبة الصديق مهاجرين إلى المدينة حتى نزلا بقاء أطراف المدينة على كلثوم بن الهدم الأنصاري⁽⁴²⁾.

أما علي بن أبي طالب رضي الله عنه، فقد أقام بمكة ثلاث ليال بأيامها، حتى أدى عن الرسول ﷺ الودائع التي كانت عنده للناس، ثم لحق برسول الله ﷺ فأدركه في قباء⁽⁴³⁾ ولما كان يوم الجمعة ركب رسول الله ﷺ راحلته وأبو بكر رضي الله عنه ردفه، وأرسل إلى ملائ من بني النجار، فجاءوا متقلدي سيوفهم، فسار بهم نحو المدينة وهم مُحَدَقُونَ⁽⁴⁴⁾ به⁽⁴⁵⁾، وقيل أنه أقام بقباء أربع عشرة⁽⁴⁶⁾ ليلة وقيل أربعة⁽⁴⁷⁾ أيام فقط، وبنى مسجد قباء في تلك الفترة كان أول مسجد أسس على التقوى وأول مسجد بني في الإسلام⁽⁴⁸⁾.

منازل المهاجرين بالمدينة:

نزل عمر بن الخطاب حين قدم المدينة، ومن لحق به من أهله وقومه، وأخوه زيد بن الخطاب، وعبد الله بن عمرو أبناء سراقبة بن المعتمر، وخنيس بن حذافة السهمي وكان صهر الفاروق على ابنته حفصة، فخلف عليها النبي صلى الله عليه وسلم بعده، سعيد بن زيد بن عمرو بن نفيل، ووافد بن عبد الله التميمي، حليف لهم، وخولي⁽⁴⁹⁾ بن أبي خولي، مالك بن أبي خولي حليفان لهم، نزلوا جميعهم بقباء على رفاعة بن عبد المنذر في بني عمرو بن عوف⁽⁵⁰⁾. ثم تتابع المهاجرين فنزل طلحة بن عبيد الله بن عثمان، وصهيب بن سنان، على خبيب بن إساف أخي بلحارث بن الخزرج، قيل أنهم نزلوا على أبي إمامة أسعد بن زرارة⁽⁵¹⁾.

ونزل حمزة بن عبد المطلب وحليفاه، أبو مرثد الغنوي وابنه مرثد وزيد بن حارثة، أبو كبشه مولى الرسول صلى الله عليه وسلم، على كلثوم بن الهرم أخي بني عمرو بن عوف بقباء وقيل نزولا على سعد بن خثيمة، ونزل عبيدة بن الحارث بن عبد المطلب وأخوه الطفيل ومن كان معهم من المهاجرين، على عبد الله بن سلمة العجلاني بقباء، ونزل الزبير بن العوام وابو سبرة بن أبي رهم ومن كان معهم على منذر بن محمد بن عقبة بن أحiche بن الجلاح في بني جحجي⁽⁵²⁾.

ونزل مصعب بن عمير بن هشام بن عبد مناف العبدري، على سعد بن معاذ بن

النعمان الأشهلي في بني عبد الأشهل، ونزل أبو حذيفة بن عتبة بن ربيعة وسالم مولاه، وعتبة بن غزوان المازني، على عباد بن بشر بن وقش في بني الأشهل⁽⁵³⁾.
ونزل عثمان بن عفان رضي الله عنه، على أوس بن ثابت بن المنذر أخي حسان بن ثابت في دار بني النجار⁽⁵⁴⁾، ونزل العُزَاب على سعد بن خثيمة وكان عزباً⁽⁵⁵⁾.

صفات المهاجرين :

صفات المهاجرين كما وصفهم الله تعالى ورسوله ﷺ وشاء الله أن تكون هذه الصفوة المختارة من أصحاب النبي ﷺ خير أمة أخرجت لنا، كما اقتضت حكمة المولى سبحانه وتعالى، أن يحصهم ويختبرهم ليميز الخبيث من الطيبين لذلك جعلت الهجرة محفوفة بالصعوبات والمخاطر والضرر من قبل قريش، وأن طريق الجنة محفوفاً بالمخاطر⁽⁵⁶⁾، وقد ورد ذلك في قوله تعالى: (أَمْ حَسِبْتُمْ أَنْ تُدْخِلُوا الْجَنَّةَ وَلَمَّا يَأْتِكُمْ مَثَلُ الَّذِينَ خَلَوْا مِنْ قَبْلِكُمْ مَسْتَهْزِئِينَ) وَالضَّرَاءُ وَزُلْزَلُوا حَتَّى يَقُولَ الرَّسُولُ وَالَّذِينَ آمَنُوا مَعَهُ مَتَى نَصُرَ اللَّهُ أَلَا إِنَّ نَصْرَ اللَّهِ قَرِيبٌ⁽⁵⁷⁾ صدق الله العظيم الإخلاص وهو الصفة التي تقتزن بالإيمان الحق، هو التقرب إلى الله تعالى بالطاعة والعمل الحسن والترفع عما هو دونه من تصنع لمخلوق واكتساب محمدة عند الناس أو محبة مدح من الخلق⁽⁵⁸⁾، قال تعالى (وَمَا أُمِرُوا إِلَّا لِيَعْبُدُوا اللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ حُنَفَاءَ وَيُقِيمُوا الصَّلَاةَ وَيُؤْتُوا الزَّكَاةَ وَذَلِكَ دِينُ الْقَيِّمَةِ)⁽⁵⁹⁾ صدق الله العظيم.

عن أبي حفص عمر بن الخطاب رضي الله عنه أنه سمع رسول الله ﷺ يقول: «إنما الأعمال بالنيات، وإن لكل أمرئ ما نوى، فمن كانت هجرته لله ورسوله فهجرته إلى الله ورسوله، ومن كانت هجرته إلى دنيا يصيبها أو امرأة ينكحها فهجرته إلى ما هاجر إليه»⁽⁶⁰⁾ أخرجه البخاري والترمذي. صفة الصدر والنصر للإسلام ودعوته ومن منطق حقيقة الإخلاص تنشأ المواقف الرائعة لأولئك المهاجرين الذين ارادوا منها نصره الإسلام والدعوة، وقد وصفهم الله تعالى بقوله عز وجل (لِلْفُقَرَاءِ الْمُهَاجِرِينَ الَّذِينَ أُخْرِجُوا مِنْ دِيَارِهِمْ وَأَمْوَالِهِمْ يَبْتَغُونَ فَضْلًا مِّنَ اللَّهِ وَرِضْوَانًا وَيَنْصُرُونَ اللَّهَ وَرَسُولَهُ أُولَئِكَ هُمُ الصَّادِقُونَ)⁽⁶¹⁾ صدق الله العظيم.

عن أبي هريرة رضي الله عنه أن النبي ﷺ قال: «ما لأحد عندنا يد إلا وقد كافأه ما خلا أبا بكر، فإن له عندنا يداً يكافئه الله بها يوم القيامة، وما نفعتني مال قط كما نفعتني مال أبي بكر ولو كنت متخذاً خليلاً لاتخذت أبا بكر خليلاً، ألا وأن صاحبكم خليل الله»⁽⁶²⁾ أخرجه الترمذي، وفي هذا الحديث تبرز لنا مصداقية المهاجرين في نصره الإسلام وصدقهم مع الله ورسوله صلى الله عليه وسلم وخير دليل على أن النبي صلى الله عليه وسلم لقب أبي بكر بالصديق، وأيضاً قد فعل مثل ذلك الكثير من الصحابة أمثال عثمان بن عفان في تجهيز جيوش المسلمين يوم غزوة تبوك، الجهاد في سبيل الله بأنفسهم وأبنائهم⁽⁶³⁾.

الصدق في الإسلام: من أهم الصفات التي يجب أن يلتزم بها المؤمن فهو يهدي إلى البر وأن يهدي إلى الجنة، والصدق من صفات المؤمن والكذب من صفات النفاق، والمنافقين، عن أبي وائل، عن عبد الله بن مسعود عن النبي صلى الله عليه وسلم أنه قال: «عليكم بالصدق، فإن الصدق

يهدي إلى البر، وإن البر يهدي إلى الجنة، وما يزال الرجل يصدق ويتحرى الصدق حتى يكتب عند الله صديقاً، وإياكم والكذب، فإن الكذب يهدي إلى الفجور، وإن الفجور يهدي إلى النار، وما يزال الرجل يكذب ويتحرى الكذب حتى يكتب عند الله كذاباً» (64) أخرجه الإمام أحمد.

صفة التضحية: هي بذل الغالي والنفيس من أجل قضية وفكرة ومبادئ وقد ضحى المهاجرون بكل شيء من أجل إعلاء كلمة الإسلام ونصرة دين الله ورسوله صلى الله عليه وسلم، وتمثل ذلك في خروجهم من ديارهم مكرهين تاركين لأموالهم وابنتهم وأزواجهم، وتضحيتهم بأنفسهم بالمشاركة في الغزوات والحروب ضد المشركين مجاهدين في سبيل الله (65)، قال تعالى (قَالِ الَّذِينَ هَاجَرُوا وَأُخْرِجُوا مِنْ دِيَارِهِمْ وَأُوذُوا فِي سَبِيلِي وَقَاتَلُوا وَقُتِلُوا لَأُكَفِّرَنَّ عَنْهُمْ سَيِّئَاتِهِمْ وَلَأُدْخِلَنَّهُمْ جَنَّاتٍ تَجْرِي مِنْ تَحْتِهَا الْأَنْهَارُ ثَوَابًا مِمَّنْ عِنْدِ اللَّهِ وَاللَّهُ عِنْدَهُ حُسْنُ الثَّوَابِ) (66) صدق الله العظيم.

جزء المهاجرين:

وهم أول من آمنوا بهذا الدين الإسلامي جاهدوا وجادوا بأموالهم وأنفسهم في سبيل تبليغه إلى الناس وإعلاء كلمته، ومن أجل النعم التي أنعم الله بها على المهاجرين سعة الرزق لهم في الدنيا، جزاءً بما هجروا من ملذات الدنيا في سبيل الله ورسوله صلى الله عليه وسلم (67)، قال تعالى (وَمَنْ يَهَاجِرْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ يَجِدْ فِي الْأَرْضِ مُرَافَعًا كَثِيرًا وَسَعَةً وَمَنْ يَخْرُجْ مِنْ بَيْتِهِ مُهَاجِرًا إِلَى اللَّهِ وَرَسُولِهِ ثُمَّ يُدْرِكْهُ الْمَوْتُ فَقَدْ وَقَعَ أَجْرُهُ عَلَى اللَّهِ وَكَانَ اللَّهُ غَفُورًا رَحِيمًا) (68). مغرفة ذنوبهم والعفو عن أخطائهم، قال تعالى (ثُمَّ إِنَّ رَبَّكَ لِلَّذِينَ هَاجَرُوا مِنْ بَعْدِ مَا فُتِنُوا ثُمَّ جَاهَدُوا وَصَبَرُوا إِنَّ رَبَّكَ مِنْ بَعْدِهَا لَغَفُورٌ رَحِيمٌ) (69). ارتفاع منزلتهم وسمو درجاتهم عند ربهم لقوله تعالى (الَّذِينَ آمَنُوا وَهَاجَرُوا وَجَاهَدُوا فِي سَبِيلِ اللَّهِ بِأَمْوَالِهِمْ وَأَنْفُسِهِمْ أَعْظَمَ دَرَجَةً عِنْدَ اللَّهِ وَأُولَئِكَ هُمُ الْفَائِزُونَ) (70).

الأنصار (الأوس والخزرج) :

الأنصار وهم الأوس والخزرج، أبوهما حارثة بن ثعلبة بن عمرو (71) بن عامر بن حارثة بن ثعلبة بن أمراء القيس بن مازن بن مالك بن الأزد (72). فإن الأنصار أصلهم من بني الإزد بن الغوث بن نبت بن مالك بن زيد بن كهلان بن سبأ بن يشجب بن يعرب بن قحطان، وهذا يعني أن الأنصار أصلهم من عرب اليمن الأزدية القحطانية (73).

فإن الأوس والخزرج أخوان، وهم أوس والخزرج بنو ثعلبة بن عمرو مزيقياء بن عامر ماء السماء، بن حارثة الغطريف بن أمراء القيس بن ثعلبة بن مازن بن الأزد، فهم بذلك أحد فروع اليمنية الاخروية وأمهما (قيلة) (74) بنت الأرقم فقد عرفوا ببني قبيلة نسبة إلى أمهم تنتسب إلى الغساسنة ملوك عرب الشام (75).

كان سيل العرب قبل الإسلام بحوالي أربعمئة سنة، وكان ذلك في عهد عمرو بن عامر بن حارثة ملك الأزد باليمن، فانهار سد مأرب وجرفت السيول المساكن والمزارع، فكان ذلك سبباً

لهجرة الأزدية من اليمن إلى الحجاز والشام وقد استقر بني عمرو بن عامر وأحفاده بمنطقة يثرب واتخذوها مساكناً لهم⁽⁷⁶⁾ ، قال تعالى (فَأَعْرَضُوا فَأَرْسَلْنَا عَلَيْهِمْ سَيْلَ الْعَرِمِ وَبَدَّلْنَاهُمْ بِجَنَّتَيْهِمْ جَنَّتَيْنِ ذَوَاتِ أُكُلٍ خَمْطٍ وَأَثْلٍ وَشَيْءٍ مِّن سِدْرٍ قَلِيلٍ)⁽⁷⁷⁾.

ملك الأوس والخزرج المدينة إلا أنه كانت الحرب كثير ما تقع بينهما، ولم يستقم لهم أن يستبد بهم ملك فملك عمرو⁽⁷⁸⁾ بن الإطنابة الخزرجي على يثرب، ومن أشهر الحروب التي وقعت بين الأوس والخزرج حرب «سمير»⁽⁷⁹⁾ وآخر حرب وقعت بينهما كانت يوم «بعث» قبل الهجرة بحوالي خمسة أعوام وقد عمل اليهود على الدس بين الأوس والخزرج وتشجيع عوامل الفرقة وإذكاء روح التحاسد⁽⁸⁰⁾.

سكن الأوس المناطق الزراعية الغنية بالمياه والمراعي بالمدينة وأنهم جاؤوا أهم قبائل اليهود وجمعهم، أما الخزرج فقد استوطنوا مناطق أقل خصوبة، وقد جاؤوا يهود بني قينقاع وعشائر أخرى من اليهود وهم الذين نزلوا في الشمال الغربي من المدينة عند المكان المعروف (بيثرب) شمال جبل سلع وقد كان لهذا أثره الكبير في العلاقات بين العرب واليهود من ناحية وبين الأوس والخزرج من ناحية أخرى⁽⁸¹⁾.

كانت كل قبيلة من قبيلتي الأوس والخزرج تنقسم إلى عدة بطون كبرى وقسمت هذه البطون إلى عشائر صغيرة، فكانت بطون الأوس تسكن المنطقة الجنوبية والشرقية، وهي منطقة العوالي من يثرب، بينما سكنت بطون الخزرج المنطقة الوسطى والشمالية وهي سافلة المدينة وليس وراءهم شيء في الغرب إلا خلاء حرة الوبرة⁽⁸²⁾.

بطون الأوس: وهي خمسة بطون كبرى هم: بني عوف بن مالك وقد انقسموا إلى عدة بيوت وعشائر وهم - بنو زيد - وتفرعا إلى بني ربيعة وأميه وعبيد، ومن بيوت بني عوف أيضاً: بنو معاوية وبنو جحجيا وبنو لوزان وقد سكنوا جميعاً منطقة قباء⁽⁸³⁾، جنوب المدينة، ما عدا بني معاوية الذين سكنوا شرقي البقيع، وبني أمية الذين سكنوا إلى جنوبهم⁽⁸⁴⁾.

بنو عمر بن مالك «النبيت» وانقسموا إلى بيوت عدة أهمها: بنو ظفر وبنو حارثه، وبنو عبد الأشهل، وبنو زعواء، وكانت مساكن هذه العشائر على الطرف الشرقي لحرة واقم⁽⁸⁵⁾، أما بنو ظفر فكانت منازلهم شمال منازل بني قريظة على وادي مهزور، وإلى شمالهم كانت منازل بني عبد الأشهل وإلى أقصى الشمال منازل بني حارثه، أما باقي عشائر النبيت من بني زعوراء وعمرو والجريش فكانت عند راتج، بنو جشم بن مالك: بن خطمه وكانت منازلهم مجاورة لمنازل بني أميه بن زيد في منطقة الماجشونية⁽⁸⁶⁾، وعند منازلهم يلتقي وادي مهزور بوادي مذنب⁽⁸⁷⁾.

بنو امرئ القيس بن مالك: وهم واقف وأسلم، وكانت منازلهم بالعوالي، بجوار مسجد الفضيخ الذي شيد بعد الهجرة بين منازل بني قريظة وبني النضير⁽⁸⁸⁾. بنو مره بن مالك: هم بنو أميه، وبنو وائل، وبنو عطيه وهؤلاء جميعاً يسمون

الجعاذرة⁽⁸⁹⁾، وكانت منازلهم بقرب قباء عند ملتقى وادي بطحان ورانونا، وبنو سعد بن مرة سكنوا راتج على طرف الحرة الشمالي وقد سمي بذلك لقيام حصن لليهود بهذا الموضع يسمى راتج، وقد تأخر إسلام هذه البطون بعد الهجرة فلم تسلم إلا بعد الخندق⁽⁹⁰⁾.

بطون قبيلة الخزرج: وهي خمسة بطون

عمرو بن الخزرج وعوف بن الخزرج وجشم بن الخزرج وكعب بن الخزرج والحارث بن الخزرج، وقد انقسمت هذه البطون بدورها إلى بطون متعددة وعشائر.

بنو عمرو بن الخزرج: وهم بنو مالك وبنو عدي وبنو مازن، وبنو دينار، وكلها من بني النجار المعروف «بتميم اللات» بن ثعلبه بن عمرو بن الخزرج، وقد سكنت بطون بني النجار في المنطقة الوسطى التي تقع حول المسجد النبوي، فمساكن بني مالك كانت في منطقة المسجد ومساكن بني عدي غربي المسجد، ومساكن بني مازن في قبلة المدينة إلى جنوبهم سكن بنو دينار خلف وادي بطنان.

بطون قبيلة الخزرج: وهي خمسة بطون

عمرو بن الخزرج وعوف بن الخزرج وجشم بن الخزرج وكعب بن الخزرج والحارث بن الخزرج، وقد انقسمت هذه البطون بدورها إلى بطون متعددة وعشائر.

بنو عمرو بن الخزرج: وهم بنو مالك وبنو عدي وبنو مازن، وبنو دينار، وكلها من بني النجار المعروف «بتميم اللات»⁽⁹¹⁾ بن ثعلبه بن عمرو بن الخزرج، وقد سكنت بطون بني النجار في المنطقة الوسطى التي تقع حول المسجد النبوي، فمساكن بني مالك كانت في منطقة المسجد ومساكن بني عدي غربي المسجد، ومساكن بني مازن في قبلة المدينة إلى جنوبهم سكن بنو دينار خلف وادي بطحان⁽⁹²⁾.

بنو عوف بن الخزرج وانقسموا إلى عدة بطون وهم: بني سالم وبني غنم وبني عنتر وقد عرفوا بالقواقل لأنهم كانوا إذا أجاروا شخصاً دفعوا إليه سهماً وقالوا له «قوكل به حيث شئت» أي تنقل به حيث شئت لا تخشى أحداً، وقد سكن القواقل على طرف الحرة الغربية غربي الوادي الذي به مسجد الجمعة⁽⁹³⁾، ومن بطون عوف بن الخزرج، بنو الحبلي الذي كان منهم عبد الله بن أبي سلول، وكانت منازلهم بين قباء والمنطقة الشرقية من وادي بطحان⁽⁹⁴⁾.

بنو جشم بن الخزرج: وهم بنو بياضة وبنو زريق وبنو سلمة وإلى جانبهم عشائر منهم دخلت فيهم، وقد سكن بنو سلمة في شماله الغربي للمدينة بجوار مسجد القبلتين، وبنو سلمة تعددت فروعهم، فمنهم بنو حرام، بنو عدي وبنو عبيد، وكانت منطقتهم تمتد من جبل سلع إلى وادي العقيق، وسكن بنو زريق وبنو بياضة وبنو حبيب في جنوب المدينة شمال مساكن بني سالم بن عوف بن الخزرج على وادي بطحان⁽⁹⁵⁾، وفي مساكن بني بياضة جمع مصعب بن عمير رضي الله عنه المسلمين في أول صلاة جمعة⁽⁹⁶⁾.

بنو الحارث بن الخزرج وانقسموا إلى عدة بطون، هم بنو مالك الأغبر بن كعب بن الخزرج الأصغر بن الحارث، وبنو جشم بن الحارث وبنو زيد مناة بن الحارث، وبنو خُدرة

وجِدَارَةُ أبناء عوف بن الحارث وبنو صخر بن الحارث، وقد سكن بنو الحارث الذين عرفوا «بالحارث» بالعوالي شرقي وادي بطحان، ما عدا بني جشم وبني زيد مناة الذين سكنوا السفح على مقربة من المسجد النبوي الشريف من الناحية الشرقية، وبني حُدرة وجِدَارَةُ الذين سكنوا مما يلي سوق المدينة⁽⁹⁷⁾.

كعب بن الخزرج: وهم بنو ساعدة الذين انقسموا بدورهم إلى بطنين هما طريف وعمر، ومن طريف سعد بن عبادة بن وليم بن حارث بن أبي خزيمة بن ثعلبة بن طريف بن الخزرج بن ساعدة بن كعب بن الخزرج وقد سكن بنو ساعدة عند المكان المعروف «بسقيفة بني ساعدة» في شرقي سوق المدينة المعروف بسوق الغنم مما يلي باب الشام وفي بئر بضاعة (98) كما كان لهم منازل عند وادي بطحان توازي مساكن بني دينار⁽⁹⁹⁾.

إسلام الأوس والخزرج:

بدأ إسلام أهل يثرب وهم من سماهم النبي ﷺ والمسلمين من بعده بالأنصار⁽¹⁰⁰⁾، وبعد أن عرض الرسول ﷺ الدين الإسلامي على القبائل، فلم يجد نفساً مؤمنة ولا قلباً مفتوحاً طاهراً ولا صدرأ مشروحاً للإسلام، بل كان الراحلون والمقيمون يتواصون بالبعد عنه، ومع ذلك فإن الرسول ﷺ لم يُخامر⁽¹⁰¹⁾ اليأس قلبه، واستمر مثابراً مجاهداً في سبيل الدعوة، حتى تأذن الحق أخيراً بالفرج⁽¹⁰²⁾.

فلما كان موسم الحج من السنة الحادية عشرة من البعثة النبوية أراد الله عز وجل إظهار دينه، وإعزاز نبيه ﷺ، انجاز مواعده له فخرج رسول الله ﷺ، بينما هو عند العقبة⁽¹⁰³⁾، لقي رهطاً⁽¹⁰⁴⁾ من الخزرج أراد الله بهم خيراً، فقال لهم رسول الله ﷺ: «من أنتم؟» قالوا: نفر من الخزرج، قال: أمن موالي (105) اليهود؟ قالوا: نعم قال ﷺ: «أفلا تجلسون أكلمكم؟ قالوا: بلى، فجلسوا معه، فدعاهم إلى الله عز وجل، وعرض عليهم الإسلام وتلا عليهم القرآن الكريم»⁽¹⁰⁶⁾.

فلما كلم رسول الله ﷺ أولئك النفر، ودعاهم إلى الله، قال بعضهم لبعض: يا قوم، تعلموا والله إنه للنبي الذي توعدكم به يهود وكانوا يقطنون معهم بالمدينة، فلا تسبقنكم إليه، فأجابوه فيما دعاهم إليه، بأن صدقوه وقبلوا منه ما عرض عليهم من الإسلام وكانوا من الخزرج من عقلاء يثرب، أنهكتهم الحرب الأهلية التي كانت بينهم وبين الأوس⁽¹⁰⁷⁾.

فأملوا أي الخزرج أن تكون دعوته ﷺ سبباً لوضع الحرب فقالوا لرسول الله ﷺ: إنا قد تركنا قومنا، ولا قوم بينهم من العداوة والشر ما بينهم، فعسى أن يجمعهم الله بك، فسنقدم عليهم، فندعوهم إلى أمرك، ونعرض عليهم الذي أجبتك إليك من هذا الدين، فإن يجمعهم الله عليه فلا رجل أعز منك، ثم انصرفوا راجعين إلى بلادهم، وقد آمنوا وصدقوا، فكانوا أفضل عونٍ ونصرة للإسلام والنبي الكريم ﷺ، فكان أول مسجد قُرى فيه القرآن الكريم بالمدينة مسجد بني زريق⁽¹⁰⁸⁾.

وكان هؤلاء الرهط ستة نفر من الخزرج، كما ذكر ابن اسحاق وهم: من بني النجار

«أسعد بن زرارة (109) ، وعوف بن الحارث (110) ، وهو ابن عفراء وهي عفراء بنت الحارث بن رفاعه بن سواد بن مالك من بني النجار، رضي الله عنهم أجمعين» (111) .

ومن بني زريق بن عامر بن زريق بن عبد حارثه بن مالك بن غضب بن جشم ابن الخزرج، كان رافع بن العجلان (112) ، ومن بني سلمة بن سعد وهم بن يزيد بن جشم بن الخزرج، قطبة (113) بن عامر بن حديدة ، ومن بني حرام بن كعب بن غنم بن كعب بن سلمه، عقبة (114) بن عامر بن ناجي ، ومن بني عبيد بن عدي بن غنم بن كعب بن سلمه، جابر (115) بن عبد الله رقاب.

فلما قدموا يثرب إلى قومهم ذكروا لهم خبر رسول الله ﷺ ودعواهم إلى الإسلام حتى فشا فيهم، فلم تبق دار من دور الأنصار إلا وفيها ذكر رسول الله ﷺ (116) .

العقبة الأولى :

عن جابر بن عبد الله عند الإمام أحمد قال: « مكث النبي ﷺ بمكة عشر سنين يتبع الناس في منازلهم عكاظ ومجناه وفي المواسم يقول ﷺ: «من يؤويني، من ينصرني، حتى أبلغ رسالة ربي وله الجنة؟» فلم يجد أحداً يؤويه ولا ينصره، حتى أن الرجل ليخرج من اليمن أو من مضر فيأتيه قومه وذو رحمة فيقولون: احذر غلام قريش، لا يفتنك ويمض بين رجالهم وهم يشيرون إليه بالأصابع، حتى بعثنا الله إليه من يثرب، فأويناه وصدقناه، فيخرج الرجل منا فيؤمن به ويقرئه القرآن، فينقلب إلى أهله فيسلمون بإسلامه، حتى لم تبق دار من دور الأنصار إلا وفيها رهط من المسلمين يظهرون الإسلام ثم ائتمروا (117) جميعاً فقلنا، حتى متى نترك رسول الله ﷺ قدموا عليه في الموسم، فواعدناه شعب العقبة، فاجتمعنا عندها من رجل ورجلين حتى توافينا، فقلنا: يا رسول الله علام نبايعك؟» (118) أخرجه الحاكم.

حتى إذا كان العام المقبل وفي الموسم من الأنصار أثنا عشر رجلاً، فلقوه بالعقبة، وكانت بيعة العقبة الأولى، فبايعوا رسول الله ﷺ على بيعة النساء وذلك قبل أن تفترض عليهم الحرب. رجال العقبة الأولى: وهم أسعد بن زرارة وعوف ومعاذ أبناء الحارث بن رفاعه وهم أبناء عفراء، ورافع بن مالك بن العجلان، وذكوان (119) بن عبد قيس بن خلدة الأنصاري. وعبادة بن الصامت (120) ، وأبو عبد الرحمن (121) يزيد بن ثعلبة البلوي، والعباس بن عبادة بن نضله، وعقبة بن عامر بن نايي بن زيد بن حرام، وقطبة بن عامر وشهد معهم من الأوس، أبو الهيثم (122) بن التيهان، وعويم (123) بن ساعدة.

عن عبادة بن الصامت قال: «كنت فيمن حضر العقبة الأولى، وكنا اثني عشر رجلاً، فبايعنا رسول الله ﷺ على بيعة النساء، وذلك قبل أن تفترض الحرب: على أن لا نشرك بالله شيئاً، ولا نسرق، ولا ننزي، ولا نقتل أولادنا ولا نأتي ببهتان نفتريه من بين أيدينا وأرجلنا، ولا نعصيه من معروف فإن وفيتم فلكم الجنة، وإن غشيتم من ذلك شيئاً فأمركم إلى الله إن شاء عذب، وإن شاء غفر» (124) أخرجه البخاري .

العقبة الثانية:

خرج أهل يثرب من المسلمين والمشركين قاصدين حج بيت الله الحرام وكان ذلك في العام التالي من العقبة الأولى، فواعدوا رسول الله ﷺ بالعقبة من أواسط أيام التشريق، حيث أراد الله بهم ما أراد من كرامته، والنصر لنييه، وإعزاز الإسلام وأهله، وإذلال الشرك وأهله.

عن كعب بن مالك⁽¹²⁵⁾ الأنصاري قال: «خرجنا إلى الحج، وواعدنا الرسول ﷺ بالعقبة من أواسط أيام التشريق، فلما فرغنا من الحج، وكانت الليلة التي واعدنا رسول الله ﷺ لها، ومعنا أبو جابر⁽¹²⁶⁾ عبد الله بن عمرو بن حرام، سيد من ساداتنا، وشريف من أشرافنا أخذناه معنا، وكنا نكتم من معنا من قومنا من المشركين أمرنا، فكلمناه وقلنا له: يا أبا جابر، إنك سيد من ساداتنا، وشريف من أشرافنا وإنا نرغب بك عما أنت فيه أن تكون حطباءً للنار غداً، ثم دعوانا إلى الإسلام، وأخبرناه بميعاد رسول الله ﷺ إيانا العقبة، قال: فأسلم وشهد معنا العقبة، وكان نقيباً، قال: فبينما تلك الليلة مع قومنا في رحالنا حتى إذا مضى ثلث الليل، خرجنا من رحالنا لميعاد رسول الله ﷺ نتسلل تسلل القطا مُستخفين، حتى اجتمعنا في الشعب عند العقبة، ونحن ثلاثة وسبعون رجلاً، ومعنا امرأتان من نسائنا، نسيبة بنت كعب أم عمارة⁽¹²⁷⁾ إحدى نساء بني مازن بن النجار وأسماء بنت عمرو⁽¹²⁸⁾، أم منيع، إحدى نساء بني سلمه، فاجتمعنا في الشعب ننظر رسول الله ﷺ حتى جاءنا ومعه العباس بن عبد المطلب وكان يومئذ على دين عبد المطلب، فقال: يا معشر الخزرج كانت العرب إنما يسمون هذا الحي من الأنصار: الخزرج، خزرجها وأوسها إن محمداً منا حيث قد علمتم، وقد منعناه من قومنا، ممن هو على مثل رأينا فيه، فهو في عز من قومه، ومنعة في بلده، وإنه قد أبي إلا الانحياز إليكم، وللحقوق بكم، فإن كنتم ترون أنكم واقون له بما دعوتموه إليه، ومانعوه ممن خالفه، فأنتم وما تحملتم من ذلك، وإن كنتم ترون أنكم مسلموه وخاذلوه بعد الخروج به إليكم، فمن الآن دعوه، فإنه في عز ومنعة من قومه وبلده، قال: فقلنا له: قد سمعنا ما قلت، فتكلم يا رسول الله، فخذ لنفسك ولربك ما أحببت، فتكلم ﷺ، فتلا القرآن ودعا إلى الله تعالى، ورغب في الإسلام، ثم قال: «أبايعكم على أن تمنعوني مما تمنعون منه نساءكم وأبناءكم» فأخذ البراء بن معرور بيده ﷺ ثم قال: نعم والذي بعثك بالحق لنمنعك مما تمنع منه أئزنا فبايعنا يا رسول الله، فنحن والله أبناء الحروب، وأهل الحلقة⁽¹²⁹⁾، ورثناها كابراً عن كابر، قال: فاعترض القول أبو الهيثم بن التيهان، فقال: أي رسول الله، إن بيننا وبين الرجال جبالاً، وإنا قاطعوها - يعني اليهود - فهل عسيت إن نحن فعلنا ذلك ثم أظهرك الله أن ترجع إلى قومك وتدعنا؟ قال: فتبسم رسول الله ﷺ ثم قال: «بل الدم والدم، والهدم الهدم⁽¹³⁰⁾، أنا منكم وأنتم مني، أحارب من حاربتم، وأسلم من سالمتم»

ثم قال الرسول ﷺ: «أخرجوا إلي منكم اثني عشر نقيباً ليكونوا على قومهم بما فيهم» فأخرجوا منهم اثني عشر نقيباً: تسعة من الخزرج وثلاثة من الأوس ونقباء الخزرج هم: أبو أمامة أسعد بن زرارة، وسعد⁽¹³¹⁾ بن الربيع، وعبد الله بن رواحة⁽¹³²⁾، ورافع بن مالك بن العجلان، والبراء⁽¹³³⁾ بن معرور، وعبد الله بن عمر بن حرام، عبادة بن الصامت، وسعد بن عبادة⁽¹³⁴⁾، والمنذر بن عمرو بن خنيس، ومن الأوس: أسيد⁽¹³⁵⁾ بن حضير، وسعد ابن خثيمه بن الحارث

الأوسي، ورفاعة بن عبد المنذر بن زهر بن زيد من بني عوف بن مالك بن الأوس.
قال ابن اسحق: حدثني عبد الله بن أبي بكر: أن رسول الله ﷺ قال للنقباء: «أنتم على قومكم بما فيكم كفلاء ككفالة الحواريين لعيسى ابن مريم، وأنا كفيل على قومي» ويعني: المسلمين، قالوا: نعم، فكانت هذه بيعة العقبة الثانية التي بايع فيها الأنصار النبي ﷺ على نصرته الله ونبيه عليه السلام، بالأنفس والأبناء والمال، فهاجر إليهم النبي ﷺ وأصحابه الكرام من مكة إلى يثرب وسميت بالمدينة بعد ذلك ⁽¹³⁶⁾.

صفات الأنصار:

قال تعالى (وَالَّذِينَ تَبَوَّؤُوا الدَّارَ وَالْإِيمَانَ مِنْ قَبْلِهِمْ يُحِبُّونَ مَنْ هَاجَرَ إِلَيْهِمْ وَلَا يَجِدُونَ فِي صُدُورِهِمْ حَاجَةً مِمَّا أُوتُوا وَيُؤْثِرُونَ عَلَى أَنْفُسِهِمْ وَلَوْ كَانَ بِهِمْ خَصَاصَةٌ وَمَنْ يُوقِ شُحَّ نَفْسِهِ فَأُولَئِكَ هُمُ الْمُفْلِحُونَ) ⁽¹³⁷⁾ عن أنس رضي الله عنه قال: «رأى النبي ﷺ النساء والصبيان مقبلين، قال: حسبت أنه قال من عرس - فقام النبي ﷺ مُثَمِّلاً فقال: «اللهم أنت أحب الناس إلي، قالها ثلاث مرات» ⁽¹³⁸⁾، أخرجه البخاري، وأيضاً عن أنس رضي الله عن النبي ﷺ قال: «آية الإيمان حب الأنصار، وآية النفاق بغض الأنصار» ⁽¹³⁹⁾ أخرجه البخاري.

عن أنس بن مالك عن أبي أسيد رضي الله عنهما قال: قال النبي ﷺ «خير دور الأنصار بنو النجار، ثم بنو عبد الأشهل، ثم بنو الحارث بن الخزرج، ثم بنو ساعدة، وفي كل دور الأنصار خير» ⁽¹⁴⁰⁾ أخرجه البخاري ومسلم.

عن زيد بن ثابت رضي الله عنه قال: «بعثني رسول الله ﷺ يوم أحد لطلب سعد بن الربيع رضي الله عنه وقال لي: «إن رأيته فاقرأه مني السلام، وقل له: يقول لك رسول الله: كيف نجدك؟ قال: فجعلت أطوف بين القتلى، فأصبته وهو في آخر رمق وبه سبعون ضربة ما بين طعنة برمح، وضربة بسيف، ورمية بسهم فقلت له: يا سعد، إن رسول الله ﷺ يقرأ عليك السلام ويقول لك: «أخبرني كيف تجدك؟ قال: على رسول الله السلام وعليك السلام، قل له: يا رسول الله أجدني أجد ريح الجنة، وقل لقومي الأنصار، لا عذر لكم عند الله أن يخلص إلى رسول الله ﷺ وفيكم شفر» ⁽¹⁴¹⁾ يطرف، قال: وفاضت نفسه - رحمه الله تعالى» ⁽¹⁴²⁾ أخرجه الحاكم.

عن أنس بن مالك رضي الله عنه أن المشركين لما رهبوا النبي ﷺ يوم أحد - وهو في سبعة من الأنصار ورجل من قريش - قال ﷺ: «من يردهم عنا وهو رفيقي في الجنة؟» فجاء رجل من الأنصار، فقاتل حتى قتل، فلما رهبوه أيضاً قال: «من يردهم عني وهو رفيقي في الجنة؟» حتى قتل السبعة فقال رسول الله ﷺ: «ما أنصفنا أصحابنا» أخرجه مسلم ⁽¹⁴³⁾.

عن أبي هريرة رضي الله عنه أنه كان يقول: حدثوني من رجل دخل الجنة لم يصل قط، فإذا لم يعرفه الناس سألوه من هو؟ فيقول: أصيرم بن عبد الأشهل: عمرو بن ثابت بن وقش، قال الحصين: فقلت لمحمود بن لبيد: كيف كان شأن الأصيرم؟ قال: كان يأبى الإسلام على قومه، فلما كان يوم أحد بدا له فأسلم، ثم أخذ سيفه فغدا حتى دخل في عرض الناس فقاتل حتى أثبتته الجراحة، فبينما رجال من بني عبد الأشهل يتلمسون الجرحى فقالوا: والله إن هذا الأصيرم ما

جاء به؟ لقد تركناه، وإنه لمنكر لهذا الحديث⁽¹⁴⁴⁾، فسألوه فقالوا: ما جاء بك يا عمرو؟ أحرب على قومك أم رغبة في الإسلام؟ فقال: بل رغبة في الإسلام، آمنت بالله وبرسوله ﷺ، وأسلمت، ثم أخذت سيفي وغزوته مع رسول الله ﷺ فقاتلت حتى أصابني ما أصابني، فلم يلبث أن مات في أيديهم، فذكروه لرسول الله ﷺ فقال: «إنه من أهل الجنة»⁽¹⁴⁵⁾ أخرجه الإمام أحمد (راجع خريطة طريق الهجرة من مكة إلى المدينة).

الخاتمة :

قال تعالى: (وَأَلَّفَ بَيْنَ قُلُوبِهِمْ لَوْ أَنْفَقْتَ مَا فِي الْأَرْضِ جَمِيعًا مَا أَلَّفْتَ بَيْنَ قُلُوبِهِمْ وَلَكِنَّ اللَّهَ أَلَّفَ بَيْنَهُمْ إِنَّهُ عَزِيزٌ حَكِيمٌ) (146) شكلت المؤاخاة بين المهاجرين والأنصار الرابط المتين بينهم فأصبحوا بذلك أسرة واحدة، وجسد واحد وقد صدق فيهم حديث الرسول (صلى الله عليه وسلم): (مثل المؤمنين في توادهم وتراحمهم كمثل الجسد الواحد إذا اشكى منه عضواً تداعى له سائر الجسد بالسهر والحمى)، وكيان قوي لا ينفصم أبداً، وساعدت صحيفة المدينة على تمثيل هذا الكيان بعد أن حددت الحقوق والواجبات لكل فرد في مجتمع المدينة بما في ذلك اليهود وغيرهم من سكان المدينة المنورة.

النتائج :

- هاجر المسلمون من مكة فراراً بدينهم، و بعداً عن عذاب قريش .
- كانت الهجرة إلى الحبشة في العام الخامس من البعثة النبوية سابقة للهجرة إلى «المدينة المنورة».
- تم تحديد الهجرة إلى «المدينة» برؤيا للرسول صلى الله عليه وسلم، فبشر بها أصحابه .
- كانت الهجرة إلى يثرب بعد بيعتي العقبة الأولى والثانية .
- بعث الرسول صلى الله عليه وسلم مصعب بن عمير إلى أهل المدينة المنورة ليعلمهم القرآن الكريم و سائر أمور دينهم، فكان أول من هاجر .
- انصهر المهاجرين والأنصار في بوتقة واحدة بعد خاوا الرسول ﷺ .
- شكلت صحيفة المدينة الاطار القانوني الذي حفظ للجميع حقوقهم، كما عرفهم بواجباتهم .
- أصبحت المدينة المنورة مقراً ومركزاً للدعوة الإسلامية .
- نزل الرسول صلى الله عليه وسلم أولاً بقاء و بناء بها مسجداً فكان أول مسجد في الإسلام .
- من صفات المهاجرين الصدق و نصرة الإسلام و التضحية من أجله .
- من صفات الأنصار أن من آية الإيمان حبهم زمن آية النفاق بقضهم كما أخبر بذلك الرسول ﷺ .
- بطون الأوس: وهي خمسة بطون كبرى هم: بني عوف بن مالك، وبني جشم بن مالك، بنو امرئ القيس بن مالك، بنو مره بن مالك، وبني سعد بن مرة .

- عمرو بن الخزرج وعوف بن الخزرج وجشم بن الخزرج وكعب بن الخزرج والحارث بن الخزرج، وقد انقسمت هذه البطون بدورها إلى بطون متعددة وعشائر.
- خريطة توضح طريق الهجرة من مكة إلى المدينة (١)



1 - حسين مؤنس: أطلس تاريخ الإسلام، الزهراء للإعلام العربي، القاهرة، 1987 م.

المصادر و المراجع :

- (1) العازمي، موسى بن راشد ، اللؤلؤ المكنون في سيرة النبي المأمون، ج 1، الرياض، دار الصميعي، 1494هـ ، ص312.
- (2) سورة الزمر: الآية 10.
- (3) سورة النساء: الآيات 97 - 99.
- (4) البيهقي، أبوبكر أحمد بن الحسين على الخسروجردي الخراساني، دلائل النبوة ومعرفة أحوال صاحب الشريعة، ج2، بيروت، دار الكتب العلمية، 1405هـ ، ص301.
- (5) ابن قيم الجوزية: شمس الدين أبي عبد الله محمد بن أبي بكر الوزاعي الدمشقي، زاد المعاد في هدى خير العباد، ج3، ط3، بيروت، مؤسسة الرسالة، 1998م ، ص26.
- (6) المقرئزي: تقي الدين أحمد بن علي بن عبد القادر الحسيني ، السيرة والشمال ، بيروت، دار الكتب العلمية، د. ت ، ص44.
- (7) مصعب بن عمير بن هاشم بن عبد مناف بن عبد الدار القرشي.ابن عبد البر: أبو عمر بن يوسف عبد الله بن محمد ، الاستيعاب في معرفة الأصحاب ، ج2، بيروت، دار الجيل ، 1992م، ص278.
- (8) عبد الله بن أم مكتوم وقيل عمرو بن أم مكتوم ابن خال السيدة خديجة بنت خويلد رضي الله عنها. الذهبي: أبو عبد الله محمد بن أحمد بن عثمان بن قايماز، سير إعلام النبلاء ، ج 1، تحقيق شعيب الأرنؤوط، ط3، بيروت، مؤسسة الرسالة 1985م ، ص361.
- (9) الأزر: جمع إزار وهو الثوب ، المقصود به هنا الحماية والستر كما يحمي الثوب الجسد، أنهم سيحمون النبي ﷺ كما يحمون أنفسهم.ابن منظور، أباالفضل جمال الدين محمد بن مكرم بن علي الأنصاري، لسان العرب ، ج 1 ، ط3، بيروت، دار صادر، 1414هـ، ص98.
- (10) بن الجوزي: أبو الفرج عبد الرحمن بن علي بن محمد ، تلقيح مفهوم أهل الأثر في عيون التاريخ والسير، بيروت، دار الأرقم للنشر ، 1997م، ص423.
- (11) هجر: هي بلدة بالبحرين وهي من بلاد عبد القيس، وقد سبقوا غيرهم من القرى إلى الإسلام ، ياقوت الحموي، أبو عبد الله شهاب الدين ياقوت بن عبد الله الرومي البغدادى، معجم البلدان، ج5 ، بيروت، دار صادر للنشر، 1970م ، ص393.
- (12) اللابتين: مفرد لها لابة أو لابتة، وتعني الحرة وهيا أرض ذات حجارة سود نخرة حيث تقع المدينة بين حرتين الوبرة وواقم.البيدي، محمد بن محمد بن عبد الرزاق المرتضى، تاج العروس من جواهر القاموس، ج4، الكويت، دار الهداية، 1965م، ص225.

- (13) الإمام البخاري: أبو عبد الله محمد بن إسماعيل العجفي، الصحيح، دمشق، دار بن كثير للنشر، 2002م، ص272.
- (14) أرسال: جمع رسل ونعني الأفواج والجماعات، ابن منظور، مصدر سابق، ج6، ص153.
- (15) أبو شهبة: محمد بن محمد بن سويلم، السيرة النبوية على ضوء لقرآن والسنة، ج1، ط8، دمشق، دار القلم، 1427هـ، ص458.
- (16) ابن كثير: البداية والنهاية، ج3، ص504.
- (17) ابن هشام: مصدر سابق، ج1، ص234.
- (18) المصدر نفسه، ص235.
- (19) صفى الرحمن المباركفوري: الرحيق المختوم، قطر، وزارة الأوقاف والشؤون الإسلامية، 2007م، ص168.
- (20) سورة النجم، الآيات (3-5).
- (21) أحمد بن أحمد غلوش: السيرة النبوية والدعوة في العهد المدني، بيروت، مؤسسة الرسالة للنشر، 2004م، ص119.
- (22) الإمام النووي: أبو زكريا محي الدين يحيى بن شرف، المجموع شرح المهذب، ج7، الأردن، بيت الأفكار الدولية، 2009، ص481.
- (23) الإمام البخاري: مصدر سابق، ج4، ص103.
- (24) أبو سلمه: عبد الله بن عبد الأسد بن هلال بن عبد الله المخزومي، وهو أخو الرسول ﷺ من الرضاع، أرضعتهم ثويبه جارية أبي لهب، وهو ابن عمته برة بنت عبد المطلب، من السابقين الأولين في الإسلام، استشهد بعد أحد في أوائل السنة الرابعة للهجرة، ابن حجر، أحمد بن علي بن محمد بن حجر العسقلاني، الإصابة في تمييز الصحابة، ج3، بيروت، دار الكتب العلمية، 1995م، ص65.
- (25) النجولي: أحمد عبد الغني النجولي الجمل، هجرة الرسول ﷺ وصحابته في القرآن والسنة، مصر - المنصورة، دار الوفاء للنشر، 1989، ص181.
- (26) عامر بن ربيعة بن مالك العنزي العدوي وهو حليفاً لبني عدي، أحد السابقين الأولين هاجر إلى الحبشة بزوجه وقد شهد بدرًا وما بعدها. الزرقاني: أبو عبد الله محمد بن عبد الباقي بن يوسف أحمد المالكي، شرح الزرقاني على المواهب اللدنية بالمنح المحمدية، ج1، بيروت، دار الكتب العلمية، 1996م، ص370.
- (27) ظعينة: من الظعن وهو السير بالبادية، والظعينة هي المرأة التي تركب على الهودج بالإبل، وسميت ظعينة لأنها تظعن مع زوجها وتقيم بإقامته، ابن منظور، مصدر سابق، ج9، ص185.

- (28) ابن كثير، أبو الفداء إسماعيل بن عمر القرشي الدمشقي، البداية والنهاية، ج3، بيروت، مكتبة المعارف، 1990م ، ص170.
- (29) الولائد: جمع للمذكر والمؤنث، وهو جمع تصغير للأبناء والأطفال. ابن منظور ، مصدر سابق، ج15 ، ص277.
- (30) الطيالسي: أبي داود سليمان بن داود بن الجارود البصري، مسند أبي داود الطيالسي ج2، تحقيق محمد بن عبدالمحسن التركي، مصر ، دار هجر، 1999م ، ص94.
- (31) الندوي، أبو الحسن علي الحسني ، السيرة النبوية ، دار الشروق ، جدة ، 1409 هـ / 1989 م ، ص155.
- (32) 32. هو ابو مرثد كناز بن الحصين بن يربوغ الغنوي، صحابي بدري، شهد المشاهد كلها، توفي في خلافة الصديق في العام الثاني عشر للهجرة النبوية. الزركلي، خير الدين بن محمود بن محمد الدمشقي، الإعلام، ج5، ط15، بيروت، دار العلم للملايين، 2002م، ص234.
- (33) أبو كبشه مولى الرسول ﷺ وهو سليمان وقيل سليم، من المهاجرين الأوائل إلى المدينة ، وهو من الفقراء المسلمين. الأصبهاني: الإمام أبو نعيم أحمد بن عبد الله بن أحمد بن اسحاق ، حلية الأولياء وطبقات الأصفياء، ج2، بيروت، دار الفكر، 1996م، ص20.
- (43) عبد الله بن الحارث بن عبد المطلب ابن عم النبي ﷺ كان اسمه عبد شمس ثم سماه النبي ﷺ عبد الله. الذهبي: سير أعلام النبلاء، ج3 ص530.
- (53) الحصين بن الحارث بن عبد المطلب القرشي وأيضاً هو أخ عبيدة وعبد الله والطفيل أبناء الحارث بني عم النبي ﷺ. ابن حزم: أبو محمد علي بن أحمد بن سعيد بن حزم الأندلسي القرطبي، جمهرة أنساب العرب، بيروت، دار الكتب العلمية، 1983م، 73.
- (36) سالم بن معقل الفارس، موالى أبي حذيفة بن عتبة، من فضلاء الموالي، أعتق وهاجر وهو من خيار الصحابة. ابن حجر: مصدر سابق ، ج3، ص11.
- (73) ابن قليج: أبو عبد الله علاء الدين مغلطاي بن قليج بن عبد الله البكجري الحنفي، الإشارة إلى سيرة المصطفى وتاريخ من بعده من الخلفاء، دمشق، دار القلم، 1996م، ص152.
- (38) ابن سعد، محمد بن سعد بن منيع الزهري، الطبقات الكبرى، ج1، تحقيق علي محمد عمر، القاهرة، مكتبة الخانجي، 2001م ، ص109.
- (39) ابن هشام ، عبد الله محمد بن عبد الملك بن هشام بن أيوب المعافري، السيرة النبوية، ج2، بيروت دار ابن حزم للنشر، 2009م ، ص93.

- (04) سورة الإسراء الآية 80 .
- (14) سورة الأنفال ، الآية 30.
- (42) العازمي: مرجع سابق ، ج2، ص34.
- (43) ابن هشام: مصدر سابق، ج2، ص107.
- (44) كل شيء استدار بشيء واحاط به، فقد أحدق به. ابن منظور: مصدر سابق، ج3، ص87.
- (54) البخاري: ، مصدر سابق ، ص272.
- (64) المصدر نفسه: ص273.
- (74) ابن هشام: مصدر سابق ، ج2، ص108.
- (48) العازمي: مرجع سابق، ج2، ص101.
- (49) خولي بن أبي خولي الجعفي، صحابي جليل، قيل أنه صاحب هجرتين، حليفاً للقحطان بن عدي في الجاهلية. ابن حجر: مصدر سابق ، ج11، ص447.
- (05) السهيلي: أبي القاسم عبد الرحمن بن عبد الله الخثعمي، الروض الأنف، ج2، القاهرة، مطبعة عبد السلام شقرون، 1967م ، ص220
- (51) ابن عبد البر، الحافظ يوسف بن عبد البر النصري، الدرر في اختصار المغازي والسير، القاهرة، لجنة إحياء التراث الإسلامي، 1966م، ص84.
- (52) السهيلي: مصدر سابق ، ج2، ص221.
- (53) ابن كثير : مصدر سابق ، ج3، ص436.
- (54) السهيلي: مصدر سابق ، ج2، ص222.
- (55) العزاب: بالضم والتشديد الذين ، هم من الأزواج لهم من الرجال والنساء، الجوهري: أبو نصر إسماعيل بنحماد الفارابي، «الصحاح» تاج اللغة وصحاح العربية، ج1، ط4، بيروت، دار العلم للملايين ، 1987م، ص180.
- (56) النجولي، أحمد عبد الغني النجولي الجمل، هجرة الرسول ﷺ وصحابه في القرآن والسنة، مصر - المنصورة، دار الوفاء للنشر، 1989، ص223.
- (57) سورة البقرة ، الآية 214 .
- (85) الصديقي: محمد بن علي محمد علان إبراهيم البكري الشافعي الأشعري ، دليل الفالحين لطرق رياض الصالحين، ج1، بيروت ، دار الكتاب العربي، 2004م، ص34.
- (59) سورة البينة ، الآية 5 .
- (60) الإمام الترمذي: أبو عيسى محمد بن عيسى ، الجامع الكبير «سنن الترمذي» ، ج4، بيروت، دار المغرب الإسلامي ، 1996، ص339 .

- (61) 61. سورة الحشر ، آية رقم 8 .
- (62) 62. الترمذي: مصدر سابق ، حديث رقم 3661.
- (63) 63. النجولي: مرجع سابق، ص194.
- (64) 64. الإمام أحمد: مصدر سابق، حديث رقم 4044.
- (65) 65. النجولي: مرجع سابق، ص231.
- (66) 66. سورة آل عمران، الآية 195.
- (67) 67. سيد قطب: سيد قطب إبراهيم حسين الشاربي، في ظلال القرآن، ط17، بيروت، دار الشروق ، 1412هـ ، ج2، ص745.
- (68) 68. سورة النساء ، الآية 100.
- (69) 69. سورة النحل ، الآية 110.
- (70) 70. سورة التوبة ، الآية 20.
- (71) 71. عمرو مزيقياء بن عامر: وهو جد الأوس والخزرج، ملك من ملوك اليمن في الجاهلية من التابعة تزامن حكمه مع انهيار سد مأرب، فخرج بأهله ونزلوا بماء غسان وتفرق بنيه بين تهامة ويثرب والشام والحجاز، لقب بمزيقياء لأنه كان يلبس في طل يوم ثوباً جديداً ويمزقه في اليوم التالي ويلبس غيره. الزركلي: خير الدين بن محمود بن محمد الدمشقي، الإعلام، ج5، ط15، بيروت، دار العلم للملايين ، 2002م ، ص80.
- (72) 72. ابن الكلبي: أبو المنذر هشام بن محمد بن السائب ، نسب معد والين الكبير ، ج1، بيروت، عالم الكتب العربية ، 1988م، ص392.
- (73) 73. ابن حزم: مصدر سابق ج 1، ص 196 .
- (74) 74. قيلة: هي قيلة بنت الأرقم بن عمرو بن جفنه بن عمرو مزيقياء، وقيل أنها بنت كاهل بن عذرة بن سعد بن هزيم بن زيد بن ليث بن سور من بني قضاة. ابن حزم: المصدر نفسه، ج1، ص332.
- (75) 75. أحمد إبراهيم الشريف: مكة والمدينة في الجاهلية وعهد الرسول، بيروت، دار الفكر العربي، « د. ت. »، ص333.
- (76) 76. القرطبي، أبو عبد الله محمد بن أحمد الأنصاري، الجامع لأحكام القرآن «تفسير القرطبي» ، ج 4، بيروت، مؤسسة الرسالة، 2006م ، ص258.
- (77) 77. سورة سبأ ، الآية 16
- (78) 78. عمر بن عامر بن زين مناه بن عامر، الخزرجي، أمه الإطنابة بنت شهاب بن زيان من بني القين بن جسر، من أشهر شعراء الجاهلية وأشهر فرسان العرب.

- ابن سعيد، أبو الحسن علي بن موسى بن الأندلسي، نشوة الطرب في تاريخ جاهلية العرب، 1، تحقيق نصرت عبدالرحمن، عمان مكتبة الأقصى، 1982م، ص 189.
- (79) حرب سمير هي أول حرب تقع بين الأوس والخزرج بيثرب، وذلك بأن رجلاً يدعى سمير من الخزرج قتل رجلاً حليفاً للأوس. البغدادي: عبدالقادر بن عمر، خزنة الأدب ولب لسان العرب، ج 4، ط 4، تحقيق عبدالسلام محمد هارون، القاهرة، مكتبة الخانجي، 1997م، ص 281.
- (80) سعيد حوي، الشيخ سعيد حوي، الأساس في السنة وفقهها، ج 1، ط 3، القاهرة، دار السلام للطباعة 1995م، ص 377،
- (81) أحمد إبراهيم الشريف، مكة والمدينة في الجاهلية وعهد الرسول، بيروت، دار الفكر العربي، «د. ت»، ص 341
- (82) سعيد حوي: مرجع سابق، ج 1، ص 376
- (83) ابن عبد ربه: شهاب الدين احمد بن محمد الاندلسي، العقد الفريد، ج 3، بيروت، مكتبة الهلال، 1986م، ص 376
- (84) أحمد إبراهيم الشريف : مرجع سابق، ص 310.
- (85) 85. السمهودي، نور الدين علي بن عبد الله، وفاء الوفا بأخبار دار المصطفى، ج 1، تحقيق قاسم السامرائي، مؤسسة الفرقان للتراث الإسلامي، المدينة المنورة، 2001م، ص 193.
- (86) منطقة بالقرب من وادي بطحان عرفت فيما بعد المرشونية، ياقوت الحموي، أبو عبد الله شهاب الدين ياقوت بن عبد الله الرومي البغدادي، معجم البلدان، ج 5، بيروت، دار صادر للنشر، 1970م، ص 234.
- (87) أحد أودية المدينة، وهو شعبه من شعب وادي بطحان، ابن زبالة، محمد بن الحسن، أخبار المدينة، تحقيق صلاح عبد العزيز ن مركز المدينة المنورة للبحوث و الدراسات، 2003 م، ص 228.
- (88) ابن عبد ربه: مصدر سابق، ج 3، ص 377
- (89) الجعاذرة: سمو بذلك الاسم لقصر قامتهم، وكانوا يسكنون بالقرب من قباء. أحمد إبراهيم الشريف : مرجع سابق، ص 257.
- (90) ابن هشام: مصدر سابق، ج 2، ص 105.
- (91) هم بطن من الخزرج القحطانيون، وقد سماهم النبي ﷺ بتميم الله. القلقشندي: أبو العباس احمد بن علم، نهاية الأدب في معرفة أنساب العرب، ج 2، ط 2، بيروت، دار الكتاب اللبناني، 1980، ص 85.

- (92) ابن حزم: مصدر سابق، ص 346 .
- (93) ابن عبد ربه: مصدر سابق ، ج 3، ص 380
- (94) أحمد إبراهيم الشريف، مرجع سابق، ص 336
- (95) السمهوري، مصدر سابق ، ج 1، ص 204
- (96) ابن عبد البر، مصدر سابق ، ص 73
- (97) الحميري، أبو عبد الله محمد بن عبد الله بن عبد المنعم ، الروض المعطار في خبر الأقطار ، ط2 ، بيروت، مؤسسة ناصر للثقافة ، 1980م، ص 325 .
- (98) بنو بضاعة بالمدينة بالقرب من ديار بني ساعدة، يقال أن الرسول ﷺ بصر وتوضاً منها وقد وردت فيها عدة أحاديث، العظيم آبادي، محمد شرف الحق العظيم آبادي، عون المعبود في شرح سنن أبو داود، بيروت، دار ابن حزم، 2005م، ص 92 .
- (99) السمهودي، مصدر سابق، ج 1، ص 208 .
- (100) كانوا يعرفون قبل ذلك ببني قيلة وهي الأم التي تجمع بين القبيلتين، فسماهم النبي ﷺ بالأنصار، في حديث عن غيلان بن جرير قال، قالت لأنس، أرايت اسم الأنصار كنتم تسمون به أم سماكم الله؟ قال: بل سمانا الله فصار ذلك علماً يطلق عليهم وعلى أبناءهم وحلفاءهم ومواليهم من بعدهم. البخاري: مصدر سابق ، حديث رقم 3776.
- (101) يخامر: من التخمر ويعني التغطية، ابن منظور: مصدر سابق، ج 4، ص 211
- (102) العازمي: مرجع سابق ، ج 1، ص 552
- (103) العقبة: الجبل الطويل - يعرض للطريق فيأخذ فيه، وهو طويل شديد الصعوبة. ابن منظور، مصدر سابق ، ج 9، ص 306
- (104) الرهط: ما دون العشرة ، المصدر نفسه: ج 5، ص 343
- (105) موالي اليهود: والمقصود بها ، أي من حلفاهم، السهيلي: مصدر سابق، ص 246.
- (106) 106.العازمي: مرجع سابق، ج 1، ص 553
- (107) 107.الحرب الأهلية: المقصود بها حرب بُعثت التي كانت بين الأوس والخزرج بيثرب قبل الهجرة النبوية بحوالي خمس سنوات، ابن منظور ، مصدر سابق ، ج 2، ص 108.
- (108) ابن هشام: مصدر سابق ، ج 2، ص 42.
- (109) أسعد بن زرارة: وهو من بني النجار الأنصاري، أبو إمامة غلبت عليه كنيته واشتهر بها شهد العقبة الأولى والثانية وباع فيهما، مات قبل غزوة بدر الكبرى في السنة الأولى للهجرة، ودفن بالقيع وهو أول من دفن به من الأنصار. ابن حجر: مصدر سابق، ج 1، ص 208.

(110) عوف بن الحارث: عوف بن الحارث بن رفاعة بن عفراء، هو أخ الصحابي الجليل معوذ بن الحارث شهد بدرًا واستشهد فيها. ابن الاثير: أبي الحسن عزالدين علي بن محمد الجزري ، أسد الغابة في معرفة الصحابة، ج3، بيروت، دار ابن حزم ، 2012م، ص426.

(111) 111.الغازمي: ، مرجع سابق، ج1، ص555

(112) 112.رافع بن مالك بن العجلان بن عمرو بن عامر بن زريق، شهد العقبتين، واستشهد في أحد. ابن عبد البر: ، مصدر سابق، ج2، ص179.

(113) 113.قطبة بن عامر بن حديدة بن عمرو بن غنم بن سواد، شهد المشاهد كلها مع الرسول ﷺ، قتل في معركة صفين، وقيل توفي في عهد عثمان بن عفان رضي الله عنهم أجمعين. الذهبي: مصدر سابق ، ج2، ص240.

(114) عقبه بن عامر بن نابي بن زيد بن حرام، شهد كل المشاهد مع الرسول ﷺ، استشهد في حروب الردة في عهدا لصديق رضوان الله عليهم ،الأصبهاني: مصدر سابق، ج2، ص8.

(115) جابر بن عبد الله بن رثاب بن النعمان بن سنان بن عبيد، شهد جميع المشاهد مع الرسول ﷺ، وقد روى عنه المحدثون أحاديث كثيرة. الذهبي: الإمام أبو عبد الله شمس الدين محمد الذهبي، تذكرة الحفاظ، بيروت، دار الكتب العلمية، 1998م، ص43 .

(116) ابن عبد البر: مصدر سابق ، ص71.

(117) ثتمروا: يعني تشاوروا. ن ابن منظور ، مصدر سابق، ج1، ص153.

(118) الحاكم: أبو عبد الله محمد بن عبد الله النيسابوري، المستدرک على الصحيحين، ط2، بيروت، دار الكتب العلمية، 2002م، ج2، ص725.

(119) ذكوان بن عبد قيس بن خلد بن مخلدة بن عامر بن زريق، المهاجري الأنصاري، لأنه هاجر إلى مكة فسكنها مع الرسول ﷺ، ثم رجع مع المهاجرين إلى المدينة، قتل يوم أحد. ابن عبد البر: مصدر سابق ، ص72.

(120) عبادة بن الصامت بن قيس بن أصرم بن فهر بن ثعلبة بن غنم الخزرجي، ابن قانع: أبو الحسن عبد الباقي بن قانع بن مرزوق الأموي، معجم الصحابة، ج2، المدينة المنورة، مكتبة الغرباء الأثرية، ص191.

(121) يزيد بن ثعلبة بن حزم بن أصرم بن عمرو بن عمارة، حليف لبني بكر، شهد العقبتين. الذهبي: مصدر سابق، ج1، ص240.

(122) أبو الهيثم ابن التيهان: مالك بن التيهان بن عبيد بن عمرو بن بني جشم

- الخزرجي. ابن قانع: مصدر سابق، ج3، ص33
- (123) عويم بن ساعدة بن علقمة بن عمرو بن حارثة الاوسي.المصدر نفسه: ج2، ص287
- (124) البخاري: مصدر سابق ، ج4، ص251.
- (125) كعب بن مالك بن عمرو بن الغيث السلمي الأنصاري الخزرجي، شاعر الإسلام، وراوي الحديث. الذهبي: مصدر سابق ، ج2، ص524.
- (126) أبو جابر بن عبد الله بن عمرو بن حرام بن كعب السلمي الخزرجي الأنصاري، من الذين شهدوا العقبة الثانية وبيعة الرضوان، ومن رواة الحديث النبوي الشريف: الذهبي، سير أعلام النبلاء، ج3، ص190.
- (127) أم عمارة نسيبة بنت كعب بن عمرو بن عوف من بني النجار الخزرجية الأنصارية. المقدسي: الحافظ عبد الغني بن عبد الواحد ، مناقب النساء الصحابات، دمشق، دار البشائر، 1994م، ص59.
- (128) أم منيع أسماء بنت عمرو بن عدي بن نائي، من بني سلمه، الأصبهاني: أبو نعيم أحمد بن عبد الله بن أحمد، معرفة الصحابة، ج6، الرياض، دار الوطن للنشر، 1998م، ص3260.
- (129) الحلقة: جمعها حلق وحلقات وتعني السلاح عامة أو الدرع خاصة. ابن منظور، مصدر سابق ، ج4، ص201.
- (130) الهدم: يعني الحرمة أي ذمتي ذمتكم، وحرمتي حرمتكم. المصدر نفسه: ج15، ص40.
- (131) سعد بن الربيع بن عمر بن أبي زهير الأنصاري الخزرجي. الاصبهاني ، معرفة الصحابة ، ص1248.
- (132) عبد الله بن رواح بن ثعلبه بن أمريئ القيس الخزرجي الأنصاري. البغوي: أبو القاسم عبد الله بن محمد بن المرزيان، معجم الصحابة، ج4، الكويت، دار البيان ، (د . ت) ، ص54.
- (133) البراء بن معرور بن صخر بن خنساء بن سنان الخزرجي الأنصاري، هو أول من استقبل القبلة. الأنصاري ، مصدر سابق ، ج1، ص249.
- (134) سعد بن عبادة بن دليم بن حارثة الخزرجي ، الذهبي: أعلام النبلاء، ج1، ص270.
- (135) أسيد بن حضير بن سماك بن عتيك من بني الأشهل الأوسي ، البخاري: أبو عبد الله محمد بن إسماعيل بن إبراهيم، التاريخ الكبير، ج2، حيدر آباد، دائرة المعارف العثمانية ، «د. ت» ، ص47 .

- (136) ابن هشام: مصدر سابق، ص 205 .
- (137) سورة الحشر الآية 9 .
- (138) البخاري: الصحيح ، ص 928.
- (139) المصدر نفسه ، ص 928.
- (140) البخاري: الصحيح : ص 929.
- (141) الشفر: حرف جفن العين الذي ينبت عليه الشعر. ، ابن منظور ، مصدر سابق، ج 4، ص 419.
- (142) الإمام مالك: مالك بن أنس بن أبي عامر أبو عبد الله المديني، الموطأ، بيروت، مؤسسة الرسالة ، 2013م، ص 962 .
- (143) الإمام مسلم: الصحيح ، ج 5، ص 178.
- (144) أي: الإسلام.
- (145) الكاندهلوي: حياة الصحابة ، ج 2، ص 100 .
- (146) سورة الأنفال الآية 63 .

حكم التلقيح الصناعي في الشريعة الإسلامية

أ. مساعد - كلية الشريعة والقانون -
جامعة دنقلا

د. نوال بشري أحمد

المستخلص:

أن موضوع التلقيح الصناعي من النوازل المستحدثة لمعالجة مشاكل عدم الإنجاب، تهدف الدراسة للكشف عن كل ماهو مشروع وممنوع في عمليات التلقيح الصناعي والآثار التي تترتب على ذلك وذلك من خلال معرفة مفهوم التلقيح الصناعي والأحكام التي تقوم بضبط عملية التلقيح الصناعي وأنواعه من داخلي وخارجي وأحكام كل نوع. تتبع أهمية الدراسة من أنها إحدى حلقات الأبحاث المتوالية في محاولة وضع هذه الوسيلة في محورها تمام أهل الطب والشرع لتأصيلها وعدم خروجها من الإطار الديني والأخلاقي. تتمثل مشكلة البحث في أن ثمة أحكاما فقهية تتعلق بالتلقيح الصناعي وهي موضع خلاف بين الفقهاء وهي مما يحتاج التعرف عليها من خلال جمعها من خلال عرض أقوال الفقهاء ومناقشتها، بهدف الوصول إلى القول الذي يغلب عليه الظن أنه الراجح ووفق الدليل. اعتمدت الدراسة على المنهج الاستقرائي التبعي والتحليلي تتبعت فيه آراء الفقهاء وعزوها لمصادرها الأصلية، وفتاويهم وما تقرر في المجامع الفقهية. وقد توصلت في نهاية تلك الدراسة لجملة من النتائج وهي ضرورة إحاطة التلقيح الصناعي بمجموعة من الإجراءات والضوابط التي تكفل عدم اختلاط الأنساب وأن الأطباء عند القيامهم بعمليات التلقيح الصناعي يقتصرون على العدد الذي يحتاجون إليه من البويضات ويكون التلقيح الصناعي حال حياة الزوجين وبضوابطه وأن عملية التلقيح الصناعي لا تجوز إلا بين رجل وامرأة تجمعهما رابطة زوجية مشروعة وأن استخدام أي طرف ثالث في وسيلة الإنجاب بالتلقيح الصناعي يعتبر باطلا وغير مشروع كما لا يجوز تلقيح المرأة بماء زوجها بعد وفاته أوصي بخضوع مراكز أطفال الأنابيب لإشراف الدولة مع قيد كل عملية تلقيح صناعي في سجلات خاصة يثبت بها قيام الزوجية والرضا بإجراء العملية.

Abstract:

The study aims to uncover all that is legitimate and forbidden in artificial insemination and the consequences of this by knowing the concept of artificial insemination and the provisions that control the process of artificial insemination and its types from internal and

external and the provisions of each type. There are jurisprudential provisions concerning artificial insemination, which are the subject of disagreement among the Jurists , which needs to be recognized by collecting them through the presentation and discussion of the sayings of the Jurists, in order to reach the most likely view that it is the most likely and according to the evidence. The study was based on the inductive and analytical approach in which it followed the opinions of the jurists and attributed them to their original sources, and their opinions and what was decided in the doctrinal universities. Ensure that the genealogy is not mixed and that the doctors when carrying out artificial insemination are limited to the number of eggs they need, and artificial insemination is the state of the couple's life and controls, and that the IVF process is only permissible between a man and a woman who are married by a legitimate marital bond. The use of any third party in the means of reproduction artificial insemination is considered invalid and illegal as it is not permissible to inoculating a woman with her husband's sperm after his death. I recommend that IVF centers be subject to the supervision of the Directory, with each IVF process being recorded in special records that prove marital and consent to the procedure.

لاشك أن الشريعة الإسلامية قد أحاطت بكافة النظم التي تحتاج إليها البشرية على مر العصور والأزمنة، ومشكلة الإنجاب هي الشغل الشاغل لكل زوجين وعواقبه كانت من أهم المشكلات التي تصدى لها العلم ووضع الحلول لهذه المشكلة ومن أهم وسائل معالجتها بالتلقيح الصناعي .

التلقيح الصناعي:

لغةً : ألقت الشجرة أنبت الفروع، وألقح الفحل الناقة أجلبها، واللقاح ماء الفحل من الإبل أو الخيل أو غيرها. واللقاح والتلقيح اسم لماء الفحل الذي حملت منه ويقال ألقح الفحل الناقة إلقاحاً ولقاحاً وتلقيحاً فيقال لقحت أي حملت.⁽¹⁾

التعريف العلمي:

عرف التلقيح الصناعي بعدة تعريفات لعل أهمها: (أنه عملية تجري لعلاج حالات العقم عند المرأة، وذلك بالتحقق من إدخال منى الزوج إلى الزوجة- أو شخص أجنبي- في عضوها التناسلي بغير اتصال جنسي)⁽²⁾.

وهو (عبارة عن اتحاد مني الرجل ببويضة المرأة باستعمال أدوات طبية، أو أي وسيلة أخرى بهدف الحمل والإنجاب دون الحاجة إلى المقاربة الجنسية)⁽³⁾.

(كما أنه يقصد به وضع الحيوانات المنوية في الجهاز التناسلي للمرأة أو إخصاب بويضة المرأة بغير الطريق الطبيعي، وذلك عن طريق استخدام البويضة وتلقيحها بالخلية الذكرية للرجل وإعادة زرعها في المرأة وكذلك يقول الشيخ الزرقا: إن الذي يحصل فيها - أي في العملية - تؤخذ نطفة الرجل تزرع في مهبل المرأة (الزوجة)، وهو الذي يحصل في حالة المباشرة الطبيعية بين الزوجين، لا فرق سوى الاستعاضة عن عضو الذكورة بمزرفة تزرع بها نطفة الزوج في الموقع المناسب من مهبل الزوجة أمام العنق)⁽⁴⁾.

(فالتلقيح الصناعي بناء على ذلك يطلق على وضع الحيوانات المنوية في الجهاز التناسلي للمرأة، أو إخصاب بويضة المرأة بغير الطرق الطبيعي، وذلك عن طريق استخراج البويضة وتلقيحها بالخلية الذكرية للرجل، وإعادة زرعها في المرأة)⁽⁵⁾.

ثانياً: تعريف: التلقيح الصناعي في الفقه الإسلامي:

(يعتبر التلقيح الصناعي أمراً مستحدثاً طرأ على الساحة العلمية لا علاقة لفقهاء المسلمين به، فلقد عرف فقهاء المسلمون التلقيح عن طريق استدخال المنى من قديم الزمان، فلقد ناقشوا هذه المسألة في كتبهم بما يسمى باستدخال المنى، ورتبوا أحكامهم عليه)⁽⁶⁾.

وفي هذا العصر وبعد التقدم العلمي الهائل واقتحامه لمجال الإنسان فقد نادى فقهاء الشرع بدراسة هذه القضية ليضعوا الضوابط الشرعية التي تضبط بها هذه المسألة، لذا فقد اجتمع علماء مجمع الفقه الإسلامي واستعرضوا طرق التلقيح الصناعي وآلياته وأساليبه ومشكلاته وخلصوا إلى ما يلي:

أحكام عامة في التلقيح الصناعي:

(أ) إن انكشاف المرأة على غير من يحل بينها وبينه الاتصال الجنسي لا يجوز بأي حال من الأحوال إلا لغرض مشروع يعتبره الشرع مباحاً.

(ب) إن احتياج المرأة إلى العلاج من مرض يؤذيها أو من حالة غير طبيعية في جسمها يسبب لها إزعاجاً يعتبر غرضاً مشروعاً يبيح لها الانكشاف على غير زوجها لهذا العلاج، وعندئذ يتقيد ذلك الانكشاف بقدر الضرورة.

(ج) كلما كان انكشاف المرأة على غير من يحل بينها وبينه الاتصال الجنسي، مباحاً لغرض مشروع يجب أن يكون المعالج امرأة مسلمة، وإلا فامرأة غير مسلمة، وإلا فطبيب مسلم، وإلا فغير مسلم، ولا يجوز الخلوة بين المعالج والمرأة التي يعالجها إلا بحضور زوجها أو امرأة أخرى.

أنواع التلقيح الصناعي:

لما كان التلقيح الصناعي يلجأ إليه لمعالجة مشكلة عدم الإنجاب التي يعاني منها بعض الأزواج، وذلك لعدة أسباب منها الخلل الموجود في الجهاز التناسلي للزوجة الذي يمنع من وصول

الخلية الذكرية إلى حيث توجد بويضتها من خلال الاتصال الجنسي الطبيعي أو أن الحيوان المنوي للزوج يكون غير صالح للإنجاب، وقد قسم التلقيح الصناعي إلى قسمين:

التلقيح الصناعي الداخلي:

أولاً: تعريف التلقيح الصناعي الداخلي: (هو نقل المني صناعياً من ذكر الرجل إلى مهبل الأنثى بقصد إحداث الحمل)⁽⁷⁾. كما عرف بأنه: (عملية طبيعة تتمثل في إخصاب المرأة عن طريق حقن السائل المنوي لزوجها في المكان المناسب من المهبل ليستوي بعد ذلك أن تكون النطفة المستخدمة في عملية التلقيح طازجة أو مجمدة)⁽⁸⁾.

(ويلاحظ أن المرأة بعد إجراء هذه العملية تظل مستلقية على ظهرها قرابة الساعة وسبب ذلك هو مساعدة النطف للوصول إلى مقرها الصحيح داخل الجهاز التناسلي حيث إن البويضة تنتظرها في بوق الرحم، ولا تجرى هذه العملية إلا في اليوم المحدد للتبويض، ويستطيع الطبيب معرفة ذلك اليوم عن طريق مراقبة حرارة المرأة طيلة الشهر، ومراقبة الدورة الشهرية في الأشهر الثلاثة السابقة، أو بوضع الأوراق الملونة على عنق المرأة والتأكد من انطلاق البويضة)⁽⁹⁾.

ب/ صورته:

للتلقيح الصناعي الداخلي ثلاث صور رئيسة وهي:

1. استدخال مني الزوج إلى داخل بوق رحم زوجته بوسيلة طبية ليتحد مع بويضتها حال قيام العلاقة الزوجية، وذلك لاستحالة التلقيح الطبيعي، أو الإنجاب بالطريق الطبيعي لأي سبب من الأسباب، كضعف الحيوان المنوي وغيره.
2. استدخال ماء الزوج المتوفى والذي أخذ منه حال حياته إلى داخل بوق رحم أرملة بوسيلة طبية، ليتحد مع بويضتها بعد انفصال العلاقة الزوجية بوفاة الزوج.
3. استدخال ماء الرجل إلى بوق رحم امرأة أجنبية عنه تكون زوجة أو أرملة رجل آخر، وقد تكون مطلقة صاحب الماء، وقد تكون بكرًا، ويكون ذلك بوسيلة طبية)⁽¹⁰⁾.

ج/ أسباب اللجوء للتلقيح الداخلي:

(فإن أهم الأسباب التي تؤدي إلى عدم الخصوبة لدى المرأة والرجل، وبالذات التي تؤدي إلى انسداد الأنابيب والتي تحتاج إما إلى إجراء عملية دقيقة لفتح الأنابيب أو إلى إجراء التلقيح الصناعي الخارجي المعروف بطفل الأنبوب وهذه الأسباب تتلخص فيما يلي)⁽¹¹⁾:

1. اختلال وظائف المبيض: حيث يصبح المبيض لا يفرز البويضة أو يفرزها ميتة، فالمرأة صاحبة هذا المبيض تعد عاقراً وعقياً أو بالتالي تصبح محرومة من البنوة عن طريق الحمل الطبيعي)⁽¹²⁾.
2. انسداد الأنبوب الذي يصل المبيض بالرحم: إن هذا الأنبوب هو همزة الوصل بين المبيض والرحم، فإذا كان هذا المسار مسدوداً من ناحية المبيض الذي يتصل به فإن هذا يعرقل عملية التبويض وإذا كان هذا الانسداد من ناحية الرحم، فإن هذا يعوق أيضاً عملية التخصيب)⁽¹³⁾.
3. ضعف الرحم أو انعدامه: الرحم هو منبت الولد، ودور الرحم في العملية الجنسية

دور وظيفي، إلا أن الأطباء والباحثين حتى الآن لم يستطيعوا إعداد المشيمة الصناعية التي من الممكن الاستعاضة بها عن الرحم، ولذلك إذا انعدم الرحم، بسبب إزالته بجراحة أو لمرض أو كان ضعيفاً بحيث لا يستطيع حمل الجنين فإن ذلك يؤدي إلى تعذر الرحم في القيام بوظيفته، حيث إن البويضات المخصبة إذا وصلت إلى هذا الرحم المعيب قام بدفعها إلى الخارج، وبالتالي يصبح الحمل غير وارد(14).

د/ شروط التلقيح الداخلي:

يشترط لجواز عملية التلقيح الداخلي توافر شروط معينة، تكفل بيان صفة الجواز والمشروعية على هذه العملية، وتم وضع هذه الشروط من خلال المؤتمرات والمجامع الفقهية، وهذه الشروط هي:

1- أن يتم التلقيح الداخلي بين الزوجين:

(اشتراط الفقهاء من خلال المؤتمرات والندوات والمجامع الفقهية لكي تتم عملية التلقيح الداخلي في إطار من الشرعية أن يتم بين الزوجين)⁽¹⁵⁾. ويعني ذلك (أن عملية التلقيح لا تجوز إلا بين رجل وامرأة تجمعهما رابطة زوجية مشروعة وهو شرط ضروري لشرعية التلقيح الصناعي)⁽¹⁶⁾. وتبدو أهمية هذا الشرط في أن الزوجة قد تعتمد في سبيل الحصول على طفل عن طريق التلقيح وسائل منوي مستخلص من غير زوجها إذا كان بالزوج عيب مرضي أو خلقي يحول دون الإخصاب والإنجاب وغالباً ما يكون هذا بغير علم الزوج أو بإدخال الغش عليه أو بإدعاء الحمل باتصال بينهما مع وجود العيب فيه أو بالاستعانة بوسائل منوي من رجل آخر بدعوى أنه من زوجها وإيهامه بذلك، ولاشك في ثبوت عدم مشروعية هذا الفعل⁽¹⁷⁾.

2- رضا الزوجين بعملية التلقيح الصناعي:

(يشترط لإجراء عملية التلقيح الصناعي رضا الزوجين بالعملية والرضا الصادر من الزوجين ليس له صورة معينة، فقد يصدر ضمناً وقد يصدر صريحاً بالقول أو الكتابة، وليست للكتابة صورة معينة، ولكن يقيني في الكتابة أن تكون بعبارات تدل بذاتها على الرضا - ويستخلص كذلك الرضا من القرائن وظروف الحال وهذا في مجال الأعمال الطبية)⁽¹⁸⁾.

3- يشترط أيضاً أن يتم التلقيح حال حياة الزوجين أي قيام الزوجية:

(لا يكفي أن تتم عملية التلقيح الصناعي بين رجل وامرأة تربطهما علاقة زوجية بل يجب إضافة إلى ذلك أن تتم عملية التلقيح الصناعي والعلاقة الزوجية ما زالت قائمة وهو شرط بديهي، فإذا ما انتهت الحياة الزوجية بالطلاق والوفاة يكون للتلقيح الصناعي أحكام أخرى)⁽¹⁹⁾.

4- أن يكون الغرض من التلقيح علاجياً:

(يؤكد الفقه الذي اهتم بدراسة هذا الموضوع على أن يكون الهدف من هذه العملية علاجياً والهدف من ذلك هو استبعاد تحسين النسل كغاية للتلقيح الصناعي وذلك خوفاً من لجوء بعض الأيدولوجيات إلى هذه الوسيلة علاوة على أن تحسين النسل يصيب في الصميم كرامة وشرف الإنسانية، وبالتالي فإن الحمل الصناعي يجب ألا يتم اللجوء إليه إلا لهدف قهري أي مانع)⁽²⁰⁾.

من موانع الإنجاب والتغلب عليها سواء كانت من قبل أي من الزوجين أو كليهما مما ذكر من الشروط السابقة كانت مرجعيتها قرار مجمع الفقه الإسلامي المتعلق بالتلقيح الصناعي وقرر الآتي: (أولاً: أن عدم الإخصاب يعتبر مرضاً يكفل للزوجين حق طلب العلاج ولو أدى ذلك إلى انكشاف العورة، ولكن ينبغي ألا تكشف العورة إلا بقدر الضرورة.

ثانياً: إن الإنجاب يجب أن يتم في زمن قيام الزوجية.

ثالثاً: إن استخدام أي طرف ثالث في وسائل الإنجاب يعتبر باطلاً وغير شرعي، والطرف الثالث يقصد به نطف ذكرية من غير الزوج، أو بويضات من غير الزوجة أو لقiche جاهزة من رجل غريب وامرأة غريبة، واستخدام رحم المرأة لاحتضان اللقiche⁽²¹⁾.

ومن خلال ما ذكر من شروط بصحة هذه العملية ومن قرارات العلماء في المجمع الفقهي يتبين لنا أهم الطرق للتلقيح الصناعي الداخلي المرفوض في الإسلام وأهم هذه الطرق التي رفضها علماء الإسلام هي:

1. التلقيح بماء رجل غريب عن المرأة يسمى مانح سواء كانت المرأة متزوجة أم غير متزوجة.
2. تلقيح الاستبضاع، وهو الذي تذهب فيه المرأة إلى بنك من بنوك النطف، وتشتري ماء رجل اشتهر بصفات متعددة.
3. حقن ماء الزوج في امرأة غير زوجته فتحمل وتلد، وبعد الولادة تتنازل عن الطفل لمن يدفع الثمن وهو الزوج.
4. تلقيح المرأة بماء زوجها بعد وفاته.
5. استخدام التلقيح الصناعي لدى مجموعة من الشاذات جنسياً يعزفن عن الجنس مع الرجال، ويتلذذن فقط بالمساحقة ومضاجعة النساء، بما أن لدى بعضهن رغبة في الإنجاب من غير الاتصال بالرجال، فإن هذه الطريقة من التلقيح قامت بتلبية رغباتهن في الإنجاب من غير الاتصال برجل⁽²²⁾.

هـ/ حكم التلقيح الداخلي:

يستفاد من مصادر التشريع الإسلامي أن المقاصد العامة للشرع الإسلامي تقضي بإزالة الضرر عن الناس ورفع الحرج عنهم لقوله تعالى (وما جعل عليكم في الدين من حرج)⁽²³⁾. فالنصوص صريحة في إزالة الضرر ومن هذه القاعدة الأصولية التي تقول الضرر يزال⁽²⁴⁾. وأصل هذه القاعدة مستمدة من حديث الرسول ﷺ القائل (لا ضرر ولا ضرار)⁽²⁵⁾.

(فالنفس هي ثاني الأمور الضرورية التي تكفلت الأحكام الشرعية بحفظها وبقيائها، ولقد شرع الإسلام القواعد الخاصة ببقاء النوع الإنساني مراعاة للنفس من جانب الوجود وذلك عن طريق التوالد والتناسل وبقاء النوع الإنساني على أكمل وجوه البقاء)⁽²⁶⁾.

فالله سبحانه وتعالى استثنى من الحكم العام حالة المضطر لقوله تعالى: (فمن اضطر غير باغ ولا عاد إثم عليه)⁽²⁷⁾. فهذه الآية تدل على حكم عام في أن الاضطرار يبيح المحظور.

لذلك اختلف الفقهاء في حكم التلقيح الداخلي على قولين، وهذا الخلاف مبنى على إدخال المنى أو إستدخاله.

الرأي الأول: (ذهب جمهور الفقهاء من الحنفية إذا عالج الرجل جارته فيما دون الفرج فأنزل، فأخذت جاريته ماءه في شيء فإستدخلته في فرجها في أثناء ذلك، فعلمت الجارية وولدت، فالولد ولده، والجارية أم لولده)⁽²⁸⁾. والمالكية: (أن أنزل الخصي أو المجهول اعتدت زوجتيهما بسبب خلوتيتهما، كما أنهما يلانان لنفي الحمل، وأن لم ينزلا فلا لعان عليهما، ولا عدة على زوجتيهما لا بخلوته ولا بعلاجه)⁽²⁹⁾. والشافعية: (لو استدخلت امرأة منى زوجها أو منى أجنبي بالشبهة، يثبت به النسب وحرمة المصاهرة، وتجب العدة، ولا يحصل به الإحصان والتحليل، وإن استدخلت ماء زوجها ولكن الزوج أنزل بزنا، قيل: لا يثبت به النسب ولا المصاهرة، ولا تجب العدة ولا يجب المهر)⁽³⁰⁾.

أدلة المذهب الأول:

استدل أصحاب المذهب الأول ومنهم متولي الشعراوي بجواز التلقيح الداخلي عن طريق استدخال المنى ومشروعيته بالأدلة الآتية:

1. إن العقم - أو عدم الإنجاب - أياً كان نوعه لا يعدو أن يكون مرضاً يدخل تحت أمره ﷺ بالعلاج ولقد حثت الشريعة على التداوي وأمرت به فكانت كل وسيلة من شأنها أن تؤدي إلى مكافحة العقم جائزة ومشروعة ما دامت في حدود الإطار الشرعي المتعارف عليه بين الفقهاء، فكان التلقيح الصناعي الذي يجري بين الزوجين جائز ولا شيء فيه بشرط أن يكون حال حياته)⁽³¹⁾.
2. أن العقم يقلل من عدد المسلمين، والنبي ﷺ حث على التكاثر فقال (تزوجوا الولود الودود، فإنني مكاثركم الأمم يوم القيامة)⁽³²⁾.
3. أن عملية التلقيح الداخلي لا تتعارض البتة مع خلق الله للإنسان إذ أن هذه التجارب لم تتم إلا بأسباب الله تعالى وهي أخذ الحيوان المنوي من الرجل مخلوق الله، وأخذ بويضة من المرأة مخلوق الله، ولا يتم النجاح في مثل هذه الوسائل إلا بإرادة الله، فكان التلقيح الصناعي الداخلي وفق الشروط الموضوعية جائز ولا شيء فيه.
4. إن الاتصال الجنسي ليس هو السبيل الوحيد لإيصال ماء رجل إلى رحم زوجته، إذ أن الحمل قد يكون بإستدخال المنى في المكان المخصص من رحم الزوجة دون اتصال كالحقن مثلاً، كما هو الحال في التلقيح الداخلي فوسيلة إدخال المنى لا يتوقف عليها تكون الجنين الذي هو من الماء الدافق الذي يستكمل مؤهلاته الطبيعية.
5. أن الرجل العقيم هو الذي يستحيل عليه الإنجاب ولا حتى بالمساعدة الطبية، أما إذا كانت المساعدة الطبية مجدية في هذا الأمر أي يمكنها إزالة العقبة التي تحول بينه وبين الإنجاب بطريق مشروع، فليس في هذا الأمر خرق لقوانين الطبيعة أو خروج على الدين، وتعدى على المشيئة الإلهية)⁽³³⁾.

رأي الثاني:

يرى ابن قدامة والبهوتي من الحنابلة (أن التلقيح الداخلي عن تلقيح استدخال المنى لا يجوز ولا يعتبر وطئاً ولا يترتب عليه أحكام الوطء)⁽³⁴⁾.

أدلة المذهب الثاني:

لم اعثر للقائلين بعدم جواز التلقيح الداخلي على أدلة سوى قول ابن قدامة الآتي:
يقول ابن قدامة: (أن الولد مخلوق من منى الرجل والمرأة جميعاً، ولذلك يأخذ الشبه منهما، وإذا استدخلت المنى بغير جماع، لم تحدث لها لذة تمنى بها، فلا يختلط نسبهما، ولو صح ذلك لكان الأجنيان الرجل والمرأة إذا تصادقا أنها أدخلت منيه، وأن الولد من ذلك المنى يلحقه نسبه، وما قال ذلك أحد)⁽³⁵⁾.

من خلال عرض أقوال الفقهاء وأدلتهم في حكم التلقيح الداخلي عن طريق استدخال المنى يظهر الرأي الراجح هو قول جمهور الفقهاء بجواز التلقيح الداخلي عن طريق الاستدخال ومشروعيته وقياساً عليه يجوز التلقيح الصناعي الداخلي مع مراعاة الشروط والضوابط التي وضعت له مع ما يتفق مع روح الشريعة الإسلامية.

كما أن الفقهاء متفقون على أن العقم أو عدم القدرة على الإنجاب يعتبر مرضاً يستوجب العلاج، ويعتبر التلقيح الداخلي من أحدث الوسائل لعلاج مثل هذه الحالات.
كما أن هذه العملية لا تعارض مع خلق الله للإنسان، فالجنين يمر بكافة مراحل التي شرعها الله.

التلقيح الصناعي الخارجي:

(الإخصاب خارج الجسم طريقة علمية حديثة لمساعدة الأسر العقيمة على حدوث الحمل وعلاج العقم مطلب إنساني واجتماعي وأن الإخصاب خارج الجسم ليس علاجاً لكل حالات العقم، بل ستبقي الزوجة التي ليست لها مبيض أو التي توقف المبيض عندها عن العمل بصفة نهائية وكذلك الزوج الذي ليس لديه القدرة على تكوين الحيوانات المنوية)⁽³⁶⁾.

أولاً: تعريف التلقيح الخارجي:

(يعريف التلقيح الخارجي بأنه: هو الذي يتم فيه تلقيح البويضة من المرأة خارج جهازها التناسلي ويتم التلقيح بماء الذكر فإذا ما تم التلقيح أعيدت البويضات الملقحة إلى رحم المرأة أو رحم امرأة أخرى)⁽³⁷⁾.

ثانياً: أسباب اللجوء للتلقيح الصناعي الخارجي:

(يلجأ الأطباء إلى إجراء عملية التلقيح الصناعي الخارجي في عدة حالات لعل أهم هذه الحالات)⁽³⁸⁾:

1. حالة انسداد الأنابيب عند الزوجة. وذلك عندما تكون الأنابيب مشوهة سواء كان التشوه راجعاً إلى عيب خلقي أو إلى التهابات أو نتيجة لاستئصال جزء من قناة فالوب وذلك لوجود حمل سابق خارج الرحم. ومن ثم يلجأ إلى التلقيح الصناعي في هذه

الحالات كعلاج أولي، بل من الممكن معالجة هذا الأمر عن طريق عملية جراحية دقيقة تهدف إلى إصلاح هذه الأنابيب.

2. ندرة الحيوانات المنوية: تستخدم طريقة التلقيح الصناعي الخارجي كعلاج لمسألة ندرة الحيوانات المنوية إلا أنه إذا كان عدد الحيوانات المنوية، أقل من عشرة ملايين في كل مليلتر فإنه تقل نسبة نجاح عملية التلقيح الداخلي وبالتالي يلجأ للتلقيح الخارجي، ولنجاح هذه العملية لابد وأن تكون حركة الحيوانات المنوية النشطة أقل من خمسة ملايين حيوان منوي في كل مليلتر فإن نسبة نجاح العملية للتلقيح الخارجي ستكون ضئيلة⁽³⁹⁾.
3. إفرازات عنق الرحم المعادية للحيوانات المنوية: قد يحدث أن تكون إفرازات عنق الرحم من النوع المعادي للحيوانات المنوية مما يؤدي إلى هلاك هذه الحيوانات.
4. حالات العقم غير المعروفة السبب: إذ إنه بالرغم من التقدم العلمي في مجال التحاليل الطبية، وعدم الخصوبة والعقم، فقد تكون هناك حالات لا يعرف سبب العقم فيها، وبعد فشل الأطباء في كل أنواع العلاج يلجأ الأطباء إلى التلقيح الخارجي⁽⁴⁰⁾.

ثالثاً: حكم التلقيح الخارجي:

(يرى الفقه الإسلامي أنه بالنسبة لما يسمى بطفل الأنابيب (والتلقيح الخارجي) يحدث بأخذ بويضة الزوجة التي لا تحمل ويتم تلقيحها بماء زوجها خارج الرحم ثم تعاد بعد ذلك إلى رحم ذات الزوجة دون استبدال أو خلط بماء إنسان آخر أو حيوان فإن ذلك جائز شرعاً ومشروع كضرورة طبية داعية لهذا الإجراء كمرض الزوج أو إن الزوجة لا تحمل إلا بهذا الطريق⁽⁴¹⁾). (ومن ثم يثبت نسب هذا الجنين عندما يولد إلى أمه وأبيه)⁽⁴²⁾.

(إلا أن هذا الجواز ليس على إطلاقه، بل هو مشروط بتوافر الشروط الآتية:

1. وجود حالة الضرورة، أي وجود مانع يمنع من اتصال المنى بالبويضة لأي سبب من الأسباب.
 2. انتفاء الضرر على أطراف العملية بما فيهم الطفل الذي سيولد بهذه الطريقة، ويكفي في هذه الحالة علنية ظن الطبيب المعالج.
 3. التحذر من اختلاط الأنساب.
 4. أن تجري هذه العملية طيبة مسلمة، فإن لم توجد فطيبة غير مسلمة، فإن لم توجد فطيبة مسلم، وإن لم يوجد فطيبة غير مسلم ثقة حفاظاً على العورات.
 5. مراعاة الحيطة والحذر في عدم تغيير الأنابيب أو خلط محتوياتها بملقحات أجنبية⁽⁴³⁾.
- (أما التلقيح الصناعي الخارجي الذي يتم عن تلقيح بويضة الزوجة بماء غير ماء زوجها ثم إعادة زرعها في رحم الزوجة وفي هذه الحالة يكون الجنين الذي يولد ابناً حقيقياً للأم دون الأب)⁽⁴⁴⁾.

وهناك حالة أثارت الكثير من الشكوك وهذه الحالة يقتصر حكمها على الرجل المسلم في حالة تعدد زوجاته وذلك بأن يتم التلقيح بماء الزوج وبويضة الزوجة ثم تزرع اللقحة في رحم الزوجة الثانية غير التي أخذت منها البويضة وقد أثارت هذه الحالة الاختلاف بين الفقهاء إلى رأيين.

(الرأي الأول يرى عدم جواز تلك الحالة وذلك على أساس أن الزوجة الأخرى التي زرعت فيها اللقيحة والتي تحمل بويضة الزوجة الأولى قد تحمل ثانية قبل انسداد رحمها على حمل اللقيحة من معاشرة الزوج لها في فترة متقاربة مع زرع اللقيحة ثم تلد توأمين ولا يعلم ولد اللقيحة من ولد معاشرة الزوج. هذا فضلاً عن الولد يجب أن ينسب لأمه التي ولدته ويسن للأم البيولوجية لأن الأم شرعاً هي بواقعة الميلاد لقوله تعالى (الذين يظاهرون منكم من نسائهم ما هن أمهاتهم إن أمهاتهم إلا اللائي ولدنهم وإنهم ليقولون منكرا من القول وزورا وإن الله لعفو غفور)⁽⁴⁵⁾. (وقد قرر المجمع الفقهي الإسلامي في دورته الثامنة عدم إباحته لهذه الحالة وحسب قرار الجواز الذي كان قد قرره في الدورة السابقة عام 1404م)⁽⁴⁶⁾.

ويرى د. جابر مهران رأياً مختلفاً في هذه الحالة فقال: (إني والله سبحانه وتعالى أعلم أرى أن للطفل أمين: الأولى التي حملته، والثانية صاحبة المبيض)⁽⁴⁷⁾. (وهناك رأي آخر يرى إباحة تلك الحالة عند الحاجة بشرط موافقة أطراف العلاقة الزوجية وأن تتطوع بمحض اختيارها بهذا الحمل وفي هذه الحالة بنسبة الجنين بعد ولادته طفلاً للآب وزوجته البيولوجية صاحبة البويضة فيما تعتبر الزوجة التي ولدته بمثابة الأم من الرضاع)⁽⁴⁸⁾. والرأي الراجح والله أعلم هو الرأي الأول الذي يرى عدم إباحة هذه الحالة لأنه لا يجوز للرجل أن يزرع بويضة ملقحة لزوجة في رحم زوجة أخرى بدعوى أنهما زوجته ودفعاً للمشاكل غير الأخلاقية.

النتائج:

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات وبفضله قد بعث للعالمين رسولا رحمة بهم صلى الله عليه وسلم أن موضوع التلقيح الصناعي من المواضيع التي شغلت أفكار رجال الدين وقد توصلت إلى النتائج الآتية:

1. أن المحور الأساسي الذي يدور عليه التطور العلمي هو نفع البشرية جمعاء .
2. يجب أن يحاط التلقيح الصناعي بمجموعة من الإجراءات والضوابط التي تكفل عدم اختلاط الأنساب.
3. يجب على الأطباء عند القيام بعمليات التلقيح الصناعي الاقتصار على العدد الذي يحتاجون إليه من البويضات.
4. يجب أن يكون التلقيح الصناعي حال حياة الزوجين وبضوابطه.
5. أن عملية التلقيح الصناعي لا تجوز إلا بين رجل وامرأة تجمعهما رابطة زوجية مشروعة
6. إن استخدام أي طرف ثالث في وسيلة الإنجاب بالتلقيح الصناعي يعتبر باطلاً وغير مشروع.
7. لا يجوز تلقيح المرأة بماء زوجها بعد وفاته.

التوصيات:

أوصي بخضوع مراكز أطفال الأنابيب لإشراف الدولة مع قيد كل عملية تلقيح صناعي في سجلات خاصة يثبت بها قيام الزوجية والرضا بإجراء العملية.

المصادر والمراجع:

- (1) ابن منظور، محمد بن مكرم، (1956م)، لسان العرب، دار بيروت للطباعة، 834/12
- (2) د. أحمد شوقي عمر أبو خطوه، شرح الأحكام العامة لقانون العقوبات لدولة الإمارات العربية المتحدة، 1998، 35/1. راجع ندوة الأسس الطبية الحديثة والقانون الجنائي، مطبوعات مركز بحوث ودراسات مكافحة الجريمة والمجرمين كلية الحقوق جامعة القاهرة، 1993م، ص 129
- (3) د. أحمد عبد الرحمن، أطفال الأنابيب نظرة اسلامية، بدون ناشر ص 120
- (4) د. مصطفى الزرقا، التلقيح الصناعي، مطبعة طربية، دمشق، سوريا، ص 22.
- (5) شوقي زكريا، التلقيح الصناعي بين الشريعة الإسلامية والقوانين الوضعية، 2001، دار النهضة العربية، ص 11.
- (6) شوقي زكريا، التلقيح الصناعي المرجع نفسه، ص 12.
- (7) الموسوعة الطبية الحديثة، مرجع سابق 530/4.
- (8) د. محمد المرسي زهرة، الإنجاب الصناعي أحكامه القانونية وحدوده الشرعية، 1990، مطبوعات جامعة الكويت، ص 21.
- (9) شوقي زكريا، التلقيح الصناعي، مرجع سابق، ص 22
- (10) د. صبري القباني، راجع أطفال تحت الطلب، 1986، طبعة دار العلام للملايين، طبعة رقم 31، ص 274.
- (11) د. محمد علي البار طفل الأنابيب والتلقيح الصناعي، 1987، الدار السعودية للطبع ص 70.
- (12) د. عبد الحميد عثمان محمد، الأم البديلة، ص 37، 38.
- (13) أ. أيمن عساف، راجع انسداد الأنابيب وأطفال الأنابيب، 11/6/1997م، مقال منشور بجريدة الأخبار المصرية .
- (14) عبد الحميد عثمان، نفس المصدر السابق، ص 38.
- (15) د. رضا عبد الحليم، النظام القانوني للإنجاب الصناعي، 1996، دار النهضة العربية القاهرة ص 463، د. أحمد محمد لطفي التلقيح الصناعي بين أقوال الأطباء وآراء الفقهاء، دار الفكر الجامعي، ص 84.
- (16) شوقي زكريا، التلقيح الصناعي بين الشريعة الإسلامية والقوانين الوضعية، مرجع سابق طبعة، ص 38.
- (17) حافظ السلمي، بحث مقدم في طفل الأنابيب في ضوء الفقه الإسلامي والقانون الوضعي، 1985، ندوة الجمعية المصرية للطب والقانون بالإسكندرية، ص 120.
- (18) د. محمد عادل عبد الرحمن، لمسئولية المدنية للأطباء، 1985، رسالة دكتوراه، كلية الحقوق، جامعة الزقازيق، ص 99.
- (19) د. أحمد محمد لطفي أحمد. التلقيح الصناعي بين أقوال الأطباء وآراء الفقهاء، مرجع سابق ص 85
- (20) د. زهير أحمد السباعي، ود محمد علي البار، الطبيب أدبه وفقه، 1997، دار القلم، ص 326.

- (21) قرار مجمع الفقه الإسلام بشأن البويضات الملحقة، المنعقد سجدة شعبان 1410هـ.
- (22) د. محمد علي البار أخلاقيات التلقيح الصناعي، مرجع سابق ، ص 47، وما بعدها.
- (23) سورة الحج، آية 78.
- (24) السيوطي عبدالرحمن بن أبي بكر جلال الدين ، الأشباه والنظائر، 1959 ، دار إحياء الكتب ، ص 83.
- (25) ابن ماجة ، سنن ابن ماجة، كتاب الأحكام، دار الدعوة، 1992 ، 784/12.
- (26) يوسف قاسم، نظرية الضرورة، 1981م مطبعة جامعة القاهرة، ص 27.
- (27) سورة البقرة آية 173.
- (28) ابن عابدين ، حاشية ابن عابدين، مرجع سابق، 213/5.
- (29) الدسوقي محمد بن عرفة ، حاشية الدسوقي على الشرح الكبيردار احياء الكتب العلمية، 468/2.
- (30) ابن محمد الحسين البغوي، التهذيب ، دار الكتب العلمية، بيروت ، 367/5.
- (31) د. يوسف القرضاوي الحلال والحرام في الإسلام، طبعة مكتبة وهبة القاهرة، ص 19.
- (32) للشيخ متولي الشعراوي ، الفتاوى ، ص 23.
- (33) المجتبي احمد بن شعيب النسائي ، سنن النسائي ، كتاب النكاح، 1986 ، دار الفكر بيروت ، 65/6.
- (34) د. محمد المرسي زهرة الإنجاب الصناعي أحكامه القانونية وحدوده الشرعية، مرجع سابق ، ص 27.
- (35) ابن قدامة ،المغني، دار الغد العربي ، 430/7، البهوتي منصور بن يونس ،كشاف القناع ،دار الفكر ،بيروت، 412/5، المرדواي الإنصاف طبعة دار إحياء التراث العربي بيروت، 280/8.
- (36) ابن قدامة المغني، مرجع سابق ، 430/7.
- (37) د. حسن سلام ،راجع الإخصاب خارج الجسم، 1985، بحث مقدم للجمعية المصرية للطب والقانون، ندوة طفل الأنابيب ، ص 43.
- (38) د. محمد علي البار، د. زهير أحمد السباعي الطبيب أدبه وفقه ، مرجع سابق ، ص 337.
- (39) حسن سلام ، الإخصاب خارج الجسم، مرجع سابق ص 233.
- (40) د. كارم غنيم، الاستنساخ والإنجاب بين تجريب العلماء وتشريع السماء، 1989، دار الفكر العربي، ص 233.
- (41) د. محمد علي البار، أخلاقيات التلقيح الصناعي، مرجع سابق ، ص 65.
- (42) مصطفى رزقا ، التلقيح الصناعي ، 26، 27، وفتوى المجمع الفقهي لرابطة العالم الإسلامي 1985م.
- (43) فتوى دار الإفتاء المصرية بتاريخ 1980/3/23م تحت رقم 6083، ص 322.
- (44) يراجع فتوى المجمع الفقهي بمكة المكرمة في دورته السابقة 1404هـ الإنجاب الصناعي، د. حسن المرسي، ص 42.
- (45) أنس فهمي، انظر مقالة العقم عند النساء مجلة العربي، العدد 320، 1985م، ص 32.
- (46) المجادلة، آية 2.
- (47) علي محمد يوسف ، انظر ثبوت النسب ، 1983، رسالة كلية الشريعة والقانون جامعة قطر، ، قرارات المجمع الفقهي في دورته الثامنة 1405هـ.
- (48) د. جابر مهران، حكم الاستنساخ والتلقيح الصناعي في الفقه الإسلامي، مجلة الدراسات القانونية، اسقوط، ص 199.
- (49) مصطفى الزرقا ، مرجع سابق ، ص 28 وما بعدها.

الحماية الموضوعية للنظام العام الاقتصادي في السودان

أ.مشارك بكلية الشريعة والقانون- جامعة
الزعيم الأزهري
أ.مساعد- بكلية الشريعة والقانون-
جامعة الزعيم الأزهري

د. يونس أحمد آدم القدال

د. الحسين عوض الجيد الطائف دفع الله

المستخلص

تناولت الدراسة الحماية الموضوعية للنظام العام الاقتصادي في السودان (دراسة مقارنة بالشريعة الإسلامية) تمثلت مشكلة الدراسة في غموض فكرة الضبط الإداري الاقتصادي في السودان وفي الشريعة الإسلامية بالإضافة إلى قصور التشريعات المنظمة للضبط الاقتصادي في السودان إزاء الظواهر الاقتصادية السالبة. نبعت أهمية الدراسة من خلال ضعف البنية القانونية للنظام العام الاقتصادي في السودان والذي انعكس سلباً على السوق لاسيما وان هذه الدراسة تعمل على معالجة إخفاقات التشريع إزاء الضبط الاقتصادي. هدفت الدراسة إلى التعرف على النظام العام الاقتصادي وإثراء الجانب الأكاديمي للدراسة إضافة إلى تسليط الضوء على الثغرات التشريعية الحائلة دون تحقيق الضبط الاقتصادي في السودان. اتبعت الدراسة المنهج الوصفي التحليلي. توصلت الدراسة لعدد من النتائج والتوصيات أهمها أظهر التطبيق العملي ضعف هيئات الضبط الاقتصادي وعدم فعاليتها في حماية النظام العام الاقتصادي كالإدارة العامة لحماية المستهلك وهيئة المواصفات والمقاييس، ويرجع ذلك الضعف إلى غياب النصوص التشريعية التي تضمن تنفيذ القانون وإلقاء المسؤولية القانونية على من يتباطأ في التنفيذ بعينه وغياب الدوافع النفسية في القوانين المنظمة لها والضعف الفني لتلك الهيئات. ومن التوصيات من الضروري على مجلس الوزراء (Council of Ministers) دمج الادارة العامة لحماية المستهلك مع الهيئة السودانية للمواصفات والمقاييس مع مجلس منع الممارسة الاحتكارية لتكون تحت مظلة (هيئة الضبط الاقتصادي) وبصورة أشبه بجهاز الحسبة الإسلامي؛ لأن هذه الهيئات خاملة بصورة فردية ولا معنى لتنوعها مع وحدة أهدافها وهي حماية المستهلك وهيئة المواصفات والمقاييس ومجلس منع الممارسات الاحتكارية. وقد اقترح الباحث لإصلاح وفعالية تلك الهيئات عمل مشروع قانون (الضبط الاقتصادي) تنضوي تلك الهيئات تحت مظلته.

Abstract

The study addressed the objective protection of the public economic system in Sudan (a study compared to Islamic law), the problem of the study was the ambiguity of the idea of econom-

ic administrative control in Sudan and in Islamic law, as well as the lack of legislation governing economic control in Sudan in the face of negative economic phenomena. The study aimed to identify the economic public system and enrich the academic aspect of the study, in addition to highlighting legislative gaps that prevent economic control in Sudan. The study followed the descriptive analytical approach. The study reached a number of results and recommendations, the most important of which showed the practical application of the weakness of the economic control bodies and their ineffectiveness in protecting the public economic system such as the General Administration of Consumer Protection and the Standards authority, due to the absence of legislative texts that guarantee the implementation of the law and the place of legal responsibility on those who slow down in the implementation and the absence of psychological motives in the laws governing them and the technical weakness of those bodies. The Council for the Prevention of Monopoly Practice to be under the umbrella of the Economic Control Authority and similar to the Islamic Computing System, because these bodies are inactive individually and have no meaning to their diversity with the unit of their objectives, namely consumer protection, the Standards and Standards Authority and the Council for the Prevention of Monopoly Practices.

مقدمة الدراسة :

الحمد لله والصلاة والسلام على إمام المتقين وقائد الغر المحجلين سيدنا محمد على آله وصحبه وسلم أما بعد .

سوف تتناول هذه الدراسة الحماية الموضوعية للنظام العام الاقتصادي في السودان دراسة مقارنة بالشريعة الاسلامية، ومما لا شك فيه ان الاقتصاد ظل مشكلة حقيقية تؤرق المجتمعات الانسانية بصورة عامة ولما كان كذلك كان لابد من ايجاد قواعد تحكم كيفية بناء الاقتصاد وكيفية ضبطه من الناحية القانونية الامر الذي يتطلب وجود دراسات علمية تتناول عملية حماية النظام العام الاقتصادي الذي هو احد عناصر النظام العام .

فإزاء التقلبات الاقتصادية والاساليب التجارية المختلفة وجد القانون ليحكم ويضبط تلك المعاملات ليعكس دور الدولة في تنظيم النشاط الاقتصادي ، وهذا الدور في السودان شابه ضعف

انعكس سلباً على الاقتصاد القومي وما صاحبه من فوضى السوق حتم ذلك الوضع عمل هذه الدراسة التي تسعى للتوصل الى الطرق المثلى لحماية النظام العام الاقتصادي .
وبرغم من وجود دراسات سابقة حول هذا الموضوع إلا ان الباحث سوف يتحاشى التكرار وسيتناول الموضوع من زاوية مختلفة ومن منظور متفرد، وسوف يعرض الباحث من خلال هذه الدراسة للسبل القانونية لمكافحة التهرب الضريبي والجمركي والذكوي وغسل الاموال باعتبارها قوام النظام العام الاقتصادي اضافة لحماية المستهلك وذلك كله بالتطرق لموقف الشريعة الإسلامية حيال تلك الموضوعات.

ماهية الحماية والنظام العام الاقتصادي وعلاقته بالضبط الإداري أولاً: مفهوم الحماية الموضوعية:

حَمَى الشيء يحميه حمياً وحمايةً ، بالكسر ، ومحميةً : مَنَعَهُ، وفي مجال الحماية الموضوعية في القوانين الوضعية فإن الحماية هي المحافظة على جوهر القيم والمثل العليا التي هي قوام النظام العام ومنع الظواهر السالبة في المجتمع.⁽¹⁾

ثانياً: مفهوم النظام العام الاقتصادي

قبل ان نبين ماهو النظام العام بالا جدى ان نتطرق لماهية الضبط الاداري الذي يهدف لوقاية النظام العام اذ يعرف الضبط الاداري ((Administrative control)) في الفقه الإسلامي (Islamic Fiqh) يقصد به نظام الحسبة عند التطرق في الحديث عن الولايات الإسلامية والذي يعرفه العلامة الماوردي (نظام الحسبة) بأنه الأمر بالمعروف إذا ظهر تركه والنهي عن المنكر إذا ظهر فعله.⁽²⁾
ويعرف الضبط الإداري في الفقه العربي بأنه مجموعة الإجراءات والأوامر والقرارات التي تتخذها السلطة المختصة بالضبط من أجل المحافظة على النظام العام في المجتمع.⁽³⁾
بهذا فان النظام العام هو الهدف الرئيسي الذي يصوب عليه الضبط الإداري ويمثل النظام العام الأسس والقيم والمثل العليا التي يقوم عليها المجتمع وتتمثل عناصره التي يقوم عليها الامن العام والصحة العامة والسكينة العامة ويتمدد ليشمل النظام الاقتصادي والآداب العامة في الفكر الإسلامي.

ويعد النظام العام الاقتصادي هو عبارة عن أحد عناصر النظام العام ككل والذي يعبر عن القيم والمثل العليا المجتمعية والتي يهدف الضبط الإداري للحفاظ عليها وقد تكون تلك القيم ثوابت في الممارسات الاقتصادية كحرمة الغش التجاري والتدليس والظلم...إلخ.

ثالثاً: العناصر القانونية للنظام العام الاقتصادي:

النظام العام الاقتصادي يشمل السوق وما تفرضه الدولة من اقتصاديات يلتزم بدفعها الافراد ليعني بذلك نظام السوق والموروثات المجتمعية لضبط المعاملات التجارية ليشمل بذلك (النظم الضابطة للمستهلك والزكاة والجمارك والممارسات الاقتصادية السالبة كغسل الأموال والثراء الحرام والمشبوه).

مكافحة الثراء الحرام والمشبوه وغسل الأموال أولاً: مفهوم الثراء الحرام والمشبوه:

يقصد بالثراء الحرام كل مال يتم الحصول عليه بأي من الطرق الآتية (من المال العام بدون عوض أو بغبن فاحش أو بالمخالفة لأحكام القوانين أو القرارات التي تضبط سلوك العمل في الوظيفة العامة أو باستغلال سلطة الوظيفة العامة أو نفوذها بوجه ينحرف بها من الأغراض المشروعة والمصالح العامة أو الهدية المقدرة التي لا يقبلها العرف أو الوجدان السليم أو القرض لأي موظف عام من جانب أي شخص له أي مصلحة مرتبطة بالوظيفة العامة أو ممن يتعاملون معها أو كان المال نتيجة لمعاملات ربوية بكافة صورها أو معاملات وهمية أو صورية تخالف الأصول الشرعية للمعاملات،⁽⁴⁾ والثراء المشبوه هو كل مال يطرأ على أي شخص ولا يستطيع بيان أي وجه مشروع لاكتسابه.⁽⁵⁾ ثانياً: مكافحة الثراء الحرام والمشبوه وغسل الأموال في الشريعة الإسلامية: اتخذت الشريعة الإسلامية عدة تدابير لمكافحة الثراء الحرام والمشبوه وغسل الأموال عن طريق عدة طرق هي:

1/ الأمر بتداول الأموال بين الناس:

التداول هو أن يكون المال متداولاً بين أيدي الناس جميعاً ومتحركاً في شكل استهلاك أو استثمار، وقد اتخذت الشريعة الإسلامية وسائلًا للتداول تصب في إطار المحافظة على النظام العام المالي وهي:

أ/ منع اكتناز النقود:

الاكتناز هو تجمع المال وقد حاربه الشريعة ووعدت المكتنزين بالعذاب الأخروي ذلك أن اكتناز الأموال والكف عن الإنفاق في سبيل الله من شأنه أن يفسد التوازن المالي والتجاري والاقتصادي عامة ويفسد معه التوازن الاجتماعي وحرمة الشارع كما جاء في سورة التوبة معنى وتفسيراً: يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا، إِنَّ كَثِيرًا مِّنْ عُلَمَاءِ الْيَهُودِ، وَعُبَادِ النَّصَارَى، يَتَمَلَّكُونَ أَمْوَالَ النَّاسِ بِغَيْرِ حَقٍّ، وَيُعْرِضُونَ عَنِ الْحَقِّ، وَيَصُدُّونَ النَّاسَ عَنْهُ، وَالَّذِينَ يَجْمَعُونَ الذَّهَبَ وَالْفِضَّةَ، وَلَا يُخْرِجُونَ حَقُوقَ اللَّهِ مِنْهَا، وَلَا يُنْفِقُونَ مِنْهَا فِي سَبِيلِ اللَّهِ فَبَشِّرْهُمْ - يَا مُحَمَّدٌ - بِعَذَابٍ مُّوجِعٍ، يَوْمَ يُوقَدُ عَلَى كُنُوزِهِمْ فِي نَارِ جَهَنَّمَ، فَتَكْوَى بِهَا جِبَاهُهُمْ، وَجُنُوبُهُمْ وَظُهُورُهُمْ، وَيَقَالُ لَهُمْ تَوْبِيخًا وَتَهْكُمًا: هَذَا مَا جَمَعْتُمْ لَأَنْفُسِكُمْ، فَذُوقُوا عَذَابَ مَا كُنْتُمْ تَكْنِزُونَهُ..⁽⁶⁾

ب/ منع التعامل بالربا: الربا لغة هو الزيادة، وشرعاً زيادة غير مشروعة في المال، وعرف عند العرب بأنه قرض الدراهم والدنانير إلى أجل بزيادة على مقدار ما استقرضه على ما يتراضون به وقد حرم الله تعالى الربا بقوله: (ذَلِكَ بِأَنَّهُمْ قَالُوا إِنَّمَا الْبَيْعُ مِثْلُ الرِّبَا وَأَحَلَّ اللَّهُ الْبَيْعَ وَحَرَّمَ الرِّبَا)⁽⁷⁾ اجمع علماء المسلمين على حرمة الربا مطلقاً، لما فيه من استغلال حاجة الناس وما ينتج عن ذلك من البغضاء والحقد، لذا حرم الله الربا.⁽⁸⁾

ج/ منع الاحتكار: الاحتكار لغة: هو الاحتباس؛ ويقال احتبس الشيء انتظارا لغلائه،⁽⁹⁾ وشرعاً هو حبس السلع عن البيع انتظارا لندرتها في السوق ليزيد ثمنها. هذا وقد حرم الشرع الحكيم

الاحتكار لقوله ﷺ: (من احتكر فهو خاطئ)⁽¹⁰⁾ وقال صلى الله عليه وسلم: (من احتكر على المسلمين طعامهم ضربة الله بالجذام والافلاس) ، وقال صلى الله عليه وسلم : (الجالب مرزوق والمحتر ملعون)⁽¹¹⁾ .

2/ منع الميسر: الميسر في اللغة: معناه قمار العرب بالازلام، يقال يسر الرجل يسر من باب وعد فهو ياسر، وقيل الميسر الجذور الذي كانوا يتقامرون عليه.⁽¹²⁾

هذا وقد منع الاسلام الميسر لان هذا النوع من الاعمال والاكسبب بها فداحة وذلك لقوله تعالى: (يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِنَّمَا الْخَمْرُ وَالْمَيْسِرُ وَالْأَنْصَابُ وَالْأَزْلَامُ رَجَسٌ مِّنْ عَمَلِ الشَّيْطَانِ فَاجْتَنِبُوهُ لَعَلَّكُمْ تُفْلِحُونَ)⁽¹³⁾ ووجه الدلالة ان الرجس واقع على الاربعة المذكورة فكان الامر متناولا للكل.

3/ المنع من ان يكون المال دولة بين فئة قليلة من أفراد الأمة.

هذه الوسيلة تكمل المعنى المطلوب للتداول وهو شموله لجميع أفراد الأمة الإسلامية لأن التداول الجزئي بين فئة الأغنياء لا يحقق مصالح العامة ولا يفي بمقصود الشرع من الأموال، كما يعرض النظام العام لخطر الحقد الاجتماعي بين الأغنياء والفقراء الأمر الذي ستتولد عنه جرائم مما يعد ذلك مهدداً حقيقياً للنظام العام بجميع عناصره.⁽¹⁴⁾

هذا وقد منع الله ذلك بقوله تعالى: (مَا أَقَاءَ اللَّهُ عَلَى رَسُولِهِ مِنْ أَهْلِ الْقُرَى فَلِلَّهِ وَلِلرَّسُولِ وَلِذِي الْقُرْبَىٰ وَالْيَتَامَىٰ وَالْمَسَاكِينِ وَإِنَّ السَّبِيلَ كَيْ لَا يَكُونَ دُولَةً بَيْنَ الْأَغْنِيَاءِ مِنْكُمْ)⁽¹⁵⁾، ومعنى الآية قسمنا الفية على تلك المصارف: كيلا يكون الفية شيئاً يتداوله الأغنياء بينهم فلا يصيب الفقراء.

4/ الوضوح المراد بوضوح الأموال: أن تكون بعيدة من مواطن المنازعات والخصومات ولحقوق الضرر، وفي هذا تسهيل لحفظها من التعرض للجحود والنكران ثم الضياع، ولتحقيق هذا المقصد شرع الإسلام التوثيق في العقود والمعاملات المالية كالكتابة والاشهاد والرهن ...، وقد أجمل الله تعالى هذا المقصد في آية الدين لقوله تعالى: (أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِذَا تَدَايَنْتُمْ بِدَيْنٍ إِلَىٰ أَجَلٍ مُّسَمًّى فَاكْتُبُوهُ)⁽¹⁶⁾.

6/ الأمر بالابتعاد عن الشبهات المالية:

قال رسول الله - صلى الله عليه وسلم (إنَّ الحلال بيِّن، وإنَّ الحرام بيِّن، وبينهما أمور مشبهات لا يعلمهن كثيرٌ مِنَ الناس، فَمَنْ اتَّقَى الشبهات استبرأ لدينه وعرضه، وَمَنْ وَقَعَ فِي الشبهات وقع في الحرام، كالراعي يرعى حول الحمى، يُوشك أن يقع فيه، ألا وإن لكل ملك حمى، ألا وإن حمى الله محارمه، ألا وإن في الجسد مضغة إذا صلحت صلح الجسد كله، وإذا فسدت فسد الجسد كله، ألا وهي القلب).⁽¹⁷⁾

ثالثاً: مكافحة الثراء الحرام والمشبوّه في التشريعات السودانية:

عمل المشرع السوداني من خلال قانون مكافحة الثراء الحرام والمشبوّه لسنة 1989م تعديل 1996م عمل على مكافحة الثراء الحرام والمشبوّه حيث اتخذ عدة تدابير أهمها إنشاء إدارة ذات شخصية اعتبارية لمكافحة الثراء الحرام والمشبوّه تابعة لوزارة العدل.

رابعاً: مكافحة غسل الأموال في التشريعات السودانية : غسل الأموال (money laundering) : يقصد به أي عمل أو الشروع في عمل يقصد به إخفاء المصدر الحقيقي للأموال المتحصلة من الجرائم وجعلها تبدو كأنها مشروعة. وقد عمل المشرع السوداني على مكافحة غسل الأموال من خلال قانون مكافحة غسل الأموال وتمويل الإرهاب لسنة 2014م التي نظم عدة موضوعات اقتصادية من شأنها مكافحة غسل الأموال.

خامساً:المقارنة بين الشريعة الإسلامية والتشريعات السودانية بشأن مكافحة الثراء الحرام والمشبوه وغسل الأموال.
1/أوجه الاتفاق:

تتفق التشريعات السودانية مع الشريعة الإسلامية في أن الكسب سواء أن كان ناتجاً عن غسل أموال (money laundering) أو ناتجاً عن ثراء حرام هو غير مشروع لأن الشريعة الإسلامية تعتبر أن هذا المال ناتج عن غش وأن الغش حرام شرعاً،⁽¹⁸⁾ وبالتالي لطالما أنه محرم أو غير مشروع وجب مكافحته شرعاً بكل السبل حيث إن الإسلام يحرم الغش والخداع بكل صوره، في بيع وشراء، وفي سائر أنواع المعاملات الإنسانية، والمسلم مطالب بالتزام الصدق في كل شؤونه، والنصيحة في الدين أغلى من كل كسب.⁽¹⁹⁾

أما بشأن التحلل من المال الحرام الذي تناوله القانون السوداني، كالمال المسروق، والمغصوب، والمختلس من المال العام، والمأخوذ بالغش والخداع، والزيادة الربوية التي يدفعها صاحبها مضطراً ومكرهاً، والرشوة التي يدفعها صاحبها مضطراً ليحصل على حقه ، ونحو ذلك : فهذا المال وفق لأحكام الشريعة الإسلامية يجب رده إلى صاحبه، ولا تبرأ الذمة إلا بذلك، بهذا فإن عملية التحلل في القانون توافقت الشرع الإسلامي لأنها تعتبر توبة بمنظور الفقه الإسلامي.⁽²⁰⁾

2/أوجه الاختلاف:

إن وسائل مكافحة الثراء الحرام والمشبوه وغسل الأموال (laundering money) في الشريعة الإسلامية أقوى عما هو في التشريعات السودانية إذ إن الشريعة تحارب تلك المظاهر من خلال الترغيب والترهيب الأخرى،⁽²¹⁾ مما لا يوجد ذلك في القانون كما أن طرق تداول الأموال ومنع الاكتناز ومن أن يكون المال دولة بين الأغنياء هي أدوات تفتقر لها التشريعات السودانية في مكافحة المال غير المشروع، لاسيما وأن التعليم له دور في مكافحة تلك الظواهر وكذلك الأمر بالمعروف والنهي عن المنكر وتقوية الوازع الديني من خلال التوعية المجتمعية عبر وسائل الإعلام بتعزيز الثقة في الله تعالى واستشعار مراقبته وغرس قيم الإخلاص في العمل هي أدوات كان بالأحرى أن تستصحب تشريعاً فلاغضاضة فيها شرعاً لطالما أنها تقضي على المال الحرام والمشبوه.

مكافحة التهرب الضريبي والجمركي والزكوي
أولاً: مفهوم التهرب الضريبي والجمركي:

التهرب الضريبي والجمركي هو الامتناع عن دفع الرسوم الضريبية والجمركية المفروضة بموجب التشريعات الضريبية والجمركية عن طريق التحايل على تلك التشريعات وأحكامها أو

باستخدام طرق الغش والتدليس واستغلال النفوذ وقاية من دفع تلك الرسوم المقررة شرعاً.⁽²²⁾
ثانياً: موقف الفقه الإسلامي من الضرائب والجمارك المعاصرة:

إن النبي ﷺ لم يشرع الضرائب والجمارك ولم يثبت أنه فرض ضريبة على مسلم بل إنه حرّم مال المسلم ومنع من مسّه إلا بحق فيه، وكان يُدير شؤون الرعيّة بما لديه من واردات وكان إذا كانت هناك حاجة طارئة للمال حصّ الناس على الصدقة ولم يفرض عليهم شيئاً حتى أنه لما علم أن مَنْ على الحدود كانوا يأخذون ضرائب على البضائع التي تدخل البلاد نهى عن ذلك، لقول النبي صلى الله عليه وسلم: (إِنَّ صَاحِبَ الْمَكْسِ فِي النَّارِ).⁽²³⁾ قال الطبراني: يعني العاشر هو الذي يأخذ العُشْر على التجارة الخارجية.⁽²⁵⁾

أما ما أوجبه على بيت المال وعلى المسلمين فإنه إذا لم يوجد في بيت المال مال ينفق عليه فإن للدولة أن تفرض ضرائب على المسلمين للقيام بالمصالح التي أوجبها الشرع عليهم وعلى بيت المال وذلك لأنه ثبت بالنص أن الله أوجبها عليهم وجعل الإمام والياً فهو الذي يحصل منهم هذا المال وينفقه على هذه المصالح وذلك كالتفقات اللازمة للفقراء والمساكين وذلك لأن إطعام الفقراء واجب ذلك على جميع المسلمين لقوله ﷺ (اطعموا الجائع وعودوا المريض وفكوا العاني).⁽²⁶⁾

وكالتفقات الواجبة للجيش والحرب والإعداد قال الله تعالى (وَجَاهِدُوا بِأَمْوَالِكُمْ وَأَنْفُسِكُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ)⁽²⁷⁾ وقال الله تعالى (لَا يَسْتَوِي الْقَاعِدُونَ مِنَ الْمُؤْمِنِينَ غَيْرُ أُولِي الضَّرَرِ وَالْمُجَاهِدُونَ فِي سَبِيلِ اللَّهِ بِأَمْوَالِهِمْ وَأَنْفُسِهِمْ).⁽²⁸⁾

بهذا فإن شريعة الإسلام تجوز فرض الضرائب عند عدم وجود مال بالخزانة العام ولضرورة مجتمعية وليست بصفة أساسية إن الضرائب في حال توفر شروط فرضها فإنها لا تفرض على كل المسلمين بل تفرض على الأغنياء لقوله ﷺ (اليد العليا خير من اليد السفلى وابدأ بمن تعول، وخير الصدقة عن ظهر غني، ومن يستعفف يعفه الله ومن يستغن يغنه الله).⁽²⁹⁾

ثانياً: مكافحة التهرب الزكوي الضريبي والجمري و في الشريعة الإسلامية:

1/ مكافحة التهرب الزكوي: الزكاة هي فريضة التي جعلها الله تعالى ركناً من أركان الإسلام والحكمة من مشروعيتها هي تطهير النفوس من مرض الشح والبخل وتطهير قلوب الفقراء من الحقد والحسد فالإسلام ينظر إلى شح النفوس إنه مرض عضال لا يسهل علاجه إلا ببذل المال وذلك جعل الزكاة واجباً من أركان الدين وحقاً ثابتاً للفقراء والمساكين،⁽³⁰⁾ وثبتت مشروعيتها لقوله تعالى: (خُذْ مِنْ أَمْوَالِهِمْ صَدَقَةً تُطَهِّرُهُمْ وَتُزَكِّيهِمْ بِهَا وَصَلِّ عَلَيْهِمْ).⁽³¹⁾ وقال العلماء لفظ (خُذْ) الوارد بالآية يعني أخذ الزكاة من وجبت عليهم ولو بالقوة. وهذا وقد استخدم الإسلام أسلوب الترغيب لمنع تهرب الزكاة وذلك بالوعد بالثواب الحسن في الدار الآخرة وبأسلوب التهيب بالعذاب الأخروي وبجبروت السلطان دنيوياً بأخذها قوة.⁽³²⁾

2/ توظيف الأموال على الأغنياء بمنظور الضرائب والجمارك :

يجوز للإمام العادل شرعاً إذا خلا بيت المال من المال ودعت الحاجة إلى تكثير الجند لسد الثغور... فللإمام أن يوظف على الأغنياء ما يراه كافياً لهم في الحال،⁽³³⁾ وثبت ذلك لما نقل عن النبي صلى الله عليه وسلم: أنه كان يشير إلى مياسر أصحابه بأن يخرجوا شيئاً من فضلات أموالهم فكانوا يبادرون بالامتثال. وقد ثبت عن القرطبي أنه إذا نزلت بالمسلمين حاجة بعد أداء الزكاة فإنه يجب صرف المال إليها واستخدم الاسلام أيضاً أسلوب الترغيب والترهيب في ذلك كما سبق بيانه بشأن الزكاة.⁽³⁴⁾

2/ فرض الجزية والخراج والعشور :

الجزية هي ضريبة سنوية على الرؤوس، على غير المسلم والموجود بدار الإسلام مفروضة عليه بحكم أمنه بدار الإسلام وتتمثل في مقدار زهيد من المال، يُفرض على الرجال البالغين القادرين، على حسب ثرواتهم، أما الفقراء، فمُعَقَّون منها إعفاءً تاماً، قال تعالى: (لِيُنْفِقْ ذُو سَعَةٍ مِنْ سَعَتِهِ وَمَنْ قُدِرَ عَلَيْهِ رِزْقُهُ فَلْيُئْتِفْ بِمِمَّا آتَاهُ اللَّهُ لَا يَكُلْفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا مَا آتَاهَا سَيَجْعَلُ اللَّهُ بَعْدَ عُسْرٍ يُسْرًا)⁽³⁵⁾، وليس للجزية حدٌ معين، وإنما ترجع إلى تقدير الإمام، ويرى معاصرون أن الجزية توازي الضرائب المعاصرة من حيث وصفها.

أما فالخراج هو ضريبة الأملاك العقارية اليوم، والعشر بمثابة ضريبة الاستغلال الزراعي، وللإمام أخذ تلك الضرائب بالقوة إذا اقتضى الأمر كما يرى العلماء. واستخدم الإسلام في تحصيلها أيضاً أسلوب الترغيب والترهيب آنف الذكر.

ثالثاً: مكافحة التهرب الضريبي والجمركي والزكوي في التشريعات السودانية:

عمل المشرع السوداني على مكافحة التهرب الضريبي من خلال إصداره كم هائل من التشريعات هي: قانون الضريبة على القيمة المضافة 2001 وقانون ضريبة الإنتاج 1985- قانون ضريبة التنمية على الواردات لسنة 2008... وقانون الجمارك 1989م وقد عكفت تلك التشريعات على مكافحة التهرب الضريبي من خلال عدة قواعد أرستها أهمها:

1. إنشاء دواوين للزكاة والضرائب وإدارة عامة للجمارك ذات شخصية اعتبارية والإشراف على ذلك، وذلك بغرض تحصيل الرسوم الضريبية والجمركية وما هو مفروض من الزكاة.
2. أوجب المشرع السوداني الزكاة فنص على أن تؤخذ من كل سوداني مسلم يملك داخل السودان أو خارجه مالاً أو غير سوداني مسلم يعمل في السودان أو يقيم فيه ويملك مالاً في السودان تجب فيه الزكاة ما لم يكن ملزماً بموجب قانون بلده بدفع الزكاة ودفعها فعلاً أو كان إعفاؤه قد تم بموجب اتفاقية لمنع الازدواج في دفع الزكاة، وحدد المشرع شروطاً عامة لوجوب ازكاة وحدد مقادير معينة للزكاة ولم يتركها خالية.⁽³⁶⁾
3. مكافحة التهرب الجمركي من خلال قانون الجمارك لسنة 1989م تعديل 2015م الذي وضع عدة ضوابط من شأنها مكافحة التهرب من دفع الجمارك التي هي رسوم تفرضها الدولة على الواردات والصادرات من البضائع والسلع.

رابعاً: مكافحة التهرب الضريبي من خلال عدة تشريعات أهمها (قانون ضريبة الدخل لسنة 1986، قانون ضريبة الإنتاج 1985م، قانون ضريبة التنمية على الواردات لسنة 2008م)
ثالثاً: المقارنة بين الشريعة الإسلامية والتشريعات السودانية بشأن مكافحة التهرب الضريبي
والزكوي والجمري:

أوجه الاتفاق:

توافق التشريعات السودانية الشريعة الإسلامية بشأن فرض الزكاة بعد ثبوت موجباتها بحسب ما نص عليه قانون ديوان الزكاة لسنة 2001م حيث إنها ركن من أركان الإسلام وثبتت مشروعيتها بقوله تعالى: (خُذْ مِنْ أَمْوَالِهِمْ صَدَقَةً تُطَهِّرُهُمْ وَتُزَكِّيهِمْ بِهَا وَصَلِّ عَلَيْهِمْ).⁽³⁷⁾ بهذا فإن قانون الزكاة المذكور هو قانون ذو أصول إسلامية بلا منازع.

أوجه الاختلاف:

من ناحية فرض الضرائب والجمارك ومكافحة التهرب منها فإنها في المفهوم الشرعي توظف على الأغنياء فقط وتتخذ كافة التدابير لمنع تهربهم منها،⁽³⁸⁾ غير أن التشريعات السودانية فرضتها على الكل بلا استثناء ومكافحة كل من يتهرب منها بالوسائل المذكورة.
ومن ناحية أخرى فإن الضرائب والجمارك حتى وإن وظيفت على الأغنياء فقط فإن الوسائل المتخذة في مكافحة التهرب منها أقوى عما هو في التشريعات السودانية إذ إن الترغيب والتهيب الأخروي لا يتأتى من خلال التشريعات الوضعية ويقودنا ذلك إلى القول بأن حماية النظام العام الروحي والعقلي تقود إلى حماية عناصر النظام العام الأخرى.
حماية المستهلك في السودان بمنظور نظام الحسبة في الإسلام

أولاً: مفهوم حماية المستهلك:

1/ تعريف المستهلك: المستهلك لغة من مصدر هلك وأهلكه غيره واستهلكه واستهلك المال: أنفقه وأنفده، وفي المعجم الوجيز: (استهلك) في كذا: جهد نفسه فيه، والمال ونحوه: أنفقه أو أهلكه،⁽³⁸⁾ وفي محاولة اجتهادية عرف المستهلك (The consumer) بأنه: الشخص الذي لأجل احتياجاته الشخصية غير المهنية، يصبح طرفاً في عقد التوريد بالسلع والخدمات.

وقد حسم المشرع السوداني الجدل الفقهي الدائر حول تعريف المستهلك، فقد عرف المستهلك في قانون التجارة وحماية المستهلك بولاية الخرطوم لسنة 2012م بقوله (المستهلك) (The consumer) يقصد به مشتري السلعة أو الخدمة بغرض الاستهلاك للاستفادة منها) بموجب هذا التعريف كل مشتري للسلع والخدمات هو مستهلك.⁽³⁹⁾

2/ تعريف حماية المستهلك ((consumer protection): حماية المستهلك بأنها الحيلولة دون وقوع مشتري السلعة أو الخدمة في الغش والتدليس والخداع من قبل المنتج أو البائع أو مقدم الخدمة.
ثانياً: حماية المستهلك في الشريعة الإسلامية:

- الإسلام سبق الأنظمة في توفير حماية شاملة للمستهلك على مستويين:⁽⁴⁰⁾

المستوى الأول (مستوى الإنتاج) حيث حث المنتج على توفير الجودة في المنتج من خلال التوجيهات النبوية:

1/ كقوله صلى الله عليه وسلم: (إن الله يحب إذا عمل أحدكم عملاً أن يتقنه).

2 / قوله صلى الله عليه وسلم (من أخذ الأجر حاسبه الله بالعمل).⁽⁴¹⁾

3/ صلى الله عليه وسلم (من غشنا فليس منا).⁽⁴²⁾

المستوى الثاني (مستوى التسويق) حيث سن العديد من الضوابط والمبادئ التي تحث على التعامل الصادق وتجنب الغش والخداع والتدليس:

ومن ذلك قوله تعالى: (وَيْلٌ لِّلْمُطَفِّفِينَ* الَّذِينَ إِذَا اكْتَالُوا عَلَى النَّاسِ يَسْتَوْفُونَ* وَإِذَا كَالُوهُمْ أَوْ وَزَنُوهُمْ يُخْسِرُونَ).⁽⁴³⁾

كما أن الرقابة التي يفرضها نظام الحسبة في الإسلام على السوق كفيل بحماية المستهلك ((con-sumer protection من الغبن والغش والتدليس على نحو سيأتي تفصيله في الفصل الثالث من هذه الرسالة بإذن الله تعالى.

ثالثاً: الحماية الدستورية للمستهلك في السودان:

أورد دستور جمهورية السودان الإنتقالى لسنة 2005م جملة من المبادئ نورد منها هنا الآتي (لكل إنسان حق أصيل في الحياة والكرامة والسلامة الشخصية، ويحمي القانون هذا الحق، ولايجوز حرمان أي إنسان من الحياة تعسفاً).⁽⁴⁴⁾

بهذا فان حق الحياة لاينحصر فقط في الحفاظ على حياة الفرد إنما يمتد إلى حماية مايرتبط بها من سبل المعيشة الكريمة.⁽⁴⁵⁾

رابعاً: الحماية القانونية للمستهلك في السودان من خلال تنظيم المنافسة ومنع الاحتكار:

أ/ تعريف الاحتكار: لغة: الحكر هو ادخار الطعام للتربص وصاحبه محتكر، واحتكار الطعام جمعه وحبسه للتربص به بالغلاء، وحكره حكراً ظلمه وتنقصه .⁽⁴⁶⁾

اصطلاحاً عرف القانون السوداني لفظ احتكار: بأنه يقصد به الهيمنة على السوق بامتلاك أي منشأة أو أكثر بقوة السوق المهيمن مما يتيح إبعاد المنافسين ورفع الأسعار فوق المستوى التنافسي محلياً أو إقليمياً أو دولياً.⁽⁴⁷⁾

إما بمنظور الفقه الاسلامي فقد اختلف الفقهاء حول المفهوم الاصطلاحي له وذلك حسب كل مذهب من المذاهب فذهب الحنفية إلى تعريفه: بأن يشتري طعاماً في مصر ويمتنع عن بيعه وقالوا بأنه اشتراء الطعام ونحوه وحبسه الى الغلاء اربعون يوماً.⁽⁴⁸⁾

اما المالكية فعرفوه بأنه الادخار للبيع وطلب الربح بتقلب الاسواق وعرفه الشافعية بأنه: اشتراء القوت وقت الغلاء وامساكه وبيعه باكثر من ثمنه للضيق، وعرفه الحنابلة بأنه: بان يشتري الشخص القوت للتجارة ويحبسه فيغلو السعر.⁽⁴⁹⁾

3/ التنظيم القانوني للمنافسة ومنع الاحتكار (Monopoly) :

نظم المشرع السوداني هذا الموضوع تحت مظلة قانون حظر احتكار سلعة السكر لسنة 2001م الذي منع حظر احتكار سلعة السكر تنظيم المنافسة ومنع الاحتكار 2009م الذي وضع عدة

ضوابط للمنافسة التجارية ومنع الاحتكار حفاظاً على النظام العام الاقتصادي أهمها:

- 1/ إنشاء مجلس للمنافسة ومنع الممارسات الاحتكارية كهيئة للضبط الإداري.
- 2/ حظر المشرع السوداني الاحتكار باعتباره تعاملاً ضاراً بالنظام العام الاقتصادي ومهدداً خطيراً على السوق وذلك بحظر مختلف أساليب الاحتكار كالاتفاقيات بين التجار أو الترتيبات بغرض التحكم في سعر السلع أو تقييد إنتاج السلع أو تجزئة وتوزيع الأسواق قيام منشآت متنافسة أو غير متنافسة بالاتفاق بغرض الضغط على المستهلك أو المورد لإجباره على التصرف بشكل معين: وحظر خداع المستهلك: عن طريق منع القيام بأي أعمال أو ممارسة أي نشاط يتصل بالمنافسة الاقتصادية يكون من شأنه خداع المستهلك وحظر الأساليب التي تقيّد حرية المستهلك.⁽⁵⁰⁾

خامساً: الحماية القانونية للمستهلك في السودان من خلال ضوابط المواصفات والمقاييس:

- 1/ تعريف بالمواصفات والمقاييس: المواصفات القياسية: يقصد بها الوثيقة التي تحدد قواعد أو إرشادات أو خصائص الخدمة أو المنتج أو طرق الإنتاج وتشمل أيضاً المصطلحات والرموز والبيانات والتغليف ووضع العلامات ومتطلبات بطاقة البيان التي تطبق على المنتج أو طرق إنتاجه أو الخدمة أو تقتصر على أي منها، والمقاييس يقصد بها الآلات والأدوات والمواعين التي تستعمل للقياس والمعايرة م.⁽⁵¹⁾

هذا وقد تناول المشرع السوداني وضع مواصفات أساسية للسلع والمنتجات ومقاييس لها من خلال قانون المواصفات والمقاييس 2008م حتى يعمل على ضبط السوق من غش المنتجين للمستهلك وقد تناول القانون موضوعه من خلال عدة ضوابط يرى الكثيرون إنها كافية لحماية المستهلك، أهمها:

1. إنشاء الهيئة السودانية للمواصفات والمقاييس مستقلة ذات شخصية اعتبارية وخاتم عام ويكون لها الحق في التقاضي باسمها ويكون المركز الرئيسي للهيئة بولاية الخرطوم،⁽⁵²⁾ وتخضع الهيئة لإشراف الوزير.⁽⁵³⁾
2. تطبيق القواعد الفنية للمواصفات والمقاييس على المنتجات المحلية والمستوردة ومنع استيراد منتج أو إنتاجه أو بيعه أو عرضه للبيع أو تداوله بأي شكل آخر ما لم يحقق متطلبات السلامة الخاصة بذلك المنتج حسب المواصفات القياسية والقواعد الفنية.⁽⁵⁴⁾

سادساً: الحماية القانونية للمستهلك في السودان من خلال تقرير حقوق المستهلك وواجبات المزود:

المزود: يقصد به كل شخص يقوم بتقديم منتج أو إنتاجه أو استيراده أو توزيعه أو عرضه أو تداوله أو الاتجار فيه أو بيعه أو التعامل به بمقابل أو بدون مقابل وذلك بهدف تقديمه إلى المستهلك أو التعاقد أو التعامل معه بأية طريقة من الطرق.⁽⁵⁵⁾

وأقر المشرع السوداني بموجب القانون القومي لحماية المستهلك لسنة 2018م حقوق المستهلك في مقابل واجبات المزود ومن أهم حقوق المستهلك: (الصحة والسلامة عند استخدامه أو استهلاكه العادي للمنتجات والاختيار الحر لمنتجات تتوافر فيها شروط الجودة المطابقة للمواصفات

والحصول على تعويض عادل عن الأضرار التي تلحق به أو بأمواله بسبب استعماله أو استخدامه أو استهلاكه للمنتجات) أما واجبات المزود هي (أن يضع باللغة العربية على المنتجات البيانات التي توجبها المواصفات السودانية أو أي قانون آخر، عدم إبرام أي اتفاق أو ممارسة أي نشاط من شأنه أن يخل بحقوق المستهلك وأن يحدد بطريقة واضحة بيانات الخدمة التي يقدمها وأسعارها ومميزاتها وخصائصها ومدة الضمان.

بناء على ما تقدم يرى الكثيرون في السودان أن القانون لبي كل احتياجات حماية المستهلك في السودان بشأن الحماية الموضوعية ولكنه قاصر إجرائياً بشأن بعض المسائل.⁽⁵⁶⁾

ثامناً: المقارنة بين الشريعة الإسلامية والتشريعات السودانية بشأن حماية المستهلك:

1/ اتفاق الشريعة والقانون بشأن المواصفات والمقاييس:

شرح الفقه الإسلامي مراقبة الموازين والمكاييل ومنع التلاعب بها لقوله تعالى: (فَأَوْفُوا الْكَيْلَ وَالْمِيزَانَ وَلَا تَبْخَسُوا النَّاسَ أَشْيَاءَهُمْ وَلَا تُفْسِدُوا فِي الْأَرْضِ)⁽⁵⁷⁾ وقوله تعالى: (وَأَقِيمُوا الْوَزْنَ بِالْقِسْطِ وَلَا تُخْسِرُوا الْمِيزَانَ)⁽⁵⁸⁾ وقوله تعالى: (وَلَا تَأْكُلُوا أَمْوَالَكُمْ بَيْنَكُمْ بِالْبَاطِلِ وَتَذُلُّوا بِهَا إِلَى الْحُكَّامِ لِتَأْكُلُوا فَرِيقًا مِّنْ أَمْوَالِ النَّاسِ بِالْإِثْمِ وَأَنْتُمْ تَعْلَمُونَ)⁽⁵⁹⁾ وكذلك عمد المشرع السوداني على تطبيق تلك القواعد من خلال قانون المواصفات والمقاييس لسنة 2008م

2/ بروز علاقة حماية المستهلك في السودان بنظام الحسبة في النظام الإسلامي:

النظام الإسلامي وضع للمستهلك ضوابط شرعية معها تستقيم أموره الاستهلاكية وذلك من خلال ترتيب حاجاته ومتطلباته في الحياة على ثلاثة أسس، وهي الضروريات والحاجات ثم الكماليات... ووضعت الشريعة قواعد تبنى عليها المعاملات بين التجار أنفسهم وبين التجار والمستهلكين وفي ذلك يقول صلى الله عليه وسلم محذراً للتجار: (التاجر الصدوق الأمين مع النبيين والصديقين والشهداء)⁽⁶⁰⁾ وقوله صلى الله عليه وسلم: (اليمين الكاذبة منقفة للسلعة ممحقة للبركة).⁽⁶¹⁾

بهذا فإن الدور الذي تقوم به تشريعات حماية المستهلك والإدارات المنشأة بموجبها لأجل حماية المستهلك في السودان به تعتبر مرآة عاكسة لنظام الحسبة في الإسلام لأنها تعمل على حماية المستهلك من فساد المنتجات والغبن كحظر قانون تنظيم المنافسة ومنع الاحتكار 2009م وخداع المستهلك وقانون الذي يعد ترجمة لحديث (من غشنا ليس منا) وكتنظيم قانون المواصفات والمقاييس لسنة 2008م للموازين والمكاييل الذي يعد ترجمة لقوله تعالى: (وَأَقِيمُوا الْوَزْنَ بِالْقِسْطِ وَلَا تُخْسِرُوا الْمِيزَانَ).

2/ أوجه الاختلاف:

من الناحية الموضوعية لا نجد وجه لاختلاف التشريعات السودانية مع الشريعة الإسلامية بشأن حماية المستهلك غير أن الشريعة الإسلامية أتاحت للإمام فرض التسعير تحقيقاً لمصلحة المسلمين إذا اقتضى الأمر ذلك لما له من دور فعال في كبح جشع التجار ونفاقهم وكذبهم حيث إن هنالك جانباً من الفقه الإسلامي يرى أن يحد الإمام لأهل السوق حد لا يتجاوزنه مع قيام الناس بالواجب في المشهور عنده وذكر سعيد بن المسيب وربيع بن عبد الرحمن ويحيى بن سعيد أنهم رخصوا فيه.⁽⁶²⁾

وقال بن القيم: لولي الأمر أن يكره المحتكرين على بيع ما عندهم بقيمة المثل عند ضرورة الناس إليه، مثل من عندهم طعام لا يحتاج إليه، وفي الناس مخمصة أو سلاح لا يحتاج إليه والناس يحتاجون إليه للجهاد أو غير ذلك.⁽⁶³⁾

خاتمة

الحمد لله الذي وفقني وسدد خطاي في إكمال ثانيا هذه المادة العلمية التي جاءت تحت عنوان الحماية الموضوعية للنظام العام الاقتصادي في السودان (دراسة مقارنة بالشريعة الإسلامية) وفي ختام هذه الدراسة توصلت لعدد من النتائج والتوصيات وفيما يلي بيان ذلك:

أولاً: النتائج:

1. لقد أظهر التطبيق العملي ضعف هيئات الضبط الاقتصادي وعدم فعاليتها في حماية النظام العام الاقتصادي كإدارة العامة لحماية المستهلك وهيئة المواصفات والمقاييس، ويرجع ذلك الضعف إلى غياب النصوص التشريعية التي تضمن تنفيذ القانون وإلقاء المسؤولية القانونية على من يتباطأ في التنفيذ بعينه وغياب الدوافع النفسية في القوانين المنظمة لها والضعف الفني لتلك الهيئات.
2. يعد نظام الحسبة الإسلامي هو من أفضل نظم الرقابة على مستوى النظم القانونية في العالم فهو يراقب عمل الضبط الاقتصادي ويراقب عمل الإدارة في تنفيذ الأوامر القانونية مما يعد أوسع مدى وعمقاً من النظم القانونية الأخرى كنظام الامبودسمان.
3. ليست هنالك مواصفات قياسية ثابتة للمنتجات المصنعة والمستوردة في السودان بموجب قانون المواصفات والمقاييس لسنة 2008م وإنما يصدر ذلك مع الحذف والتعديل من حين لآخر من هيئة المواصفات والمقاييس.
4. استخدمت التشريعات السودانية الضبطية أسلوب الترخيص بدلاً من أسلوب الإخطار ونظام التنفيذ المباشر لقرارات الضبط كواحدة من أساليب الضبط الإداري.
5. أن السبب الرئيسي في خمول هيئات الضبط الاقتصادي في السودان هو توزيعها بين أكثر من جهة مع توزع الاختصاصات.

ثانياً: التوصيات:

1. من الضروري على مجلس الوزراء (Council of Ministers) دمج الإدارة العامة لحماية المستهلك مع الهيئة السودانية للمواصفات والمقاييس مع مجلس منع الممارسة الاحتكارية لتكون تحت مظلة (هيئة الضبط الاقتصادي) وبصورة أشبه بجهاز الحسبة الإسلامي؛ لأن هذه الهيئات خاملة بصورة فردية ولا معنى لتنوعها مع وحدة أهدافها وهي حماية المستهلك وقد اقترح الباحث لإصلاح وفعالية تلك الهيئات مشروع قانون (الضبط الاقتصادي) يتمنى أن يجد آذاناً صاغية.
2. لا بد للمشرع السوداني من اقتفاء آثار الفكر الإسلامي في إطار تجربة نظام الحسبة في الإسلام ودوره في حماية النظام العام الاقتصادي.
3. ضرورة أن يضع مجلس الوزراء مواصفات قياسية ثابتة للوارد من المنتجات وذلك لإحكام عملية الضبط الاقتصادي.

المصادر والمراجع

- (1) القاموس المحيط للفيروز آبادي /147ط- مؤسسة الرسالة بيروت /1416هـ، مختار الصحاح للإمام محمد بن أبي بكر الرازي /158طبعة دار الدعوة استانبول 1408هـ
- (2) أبي الحسن علي بن حبيب البصري البغدادي الماوردي الشافعي: الأحكام السلطانية، الطبعة السابعة، المجلد1، ص240
- (3) عبد الغني بسيوني عبد الله- المرجع سابق، ص390.
- (4) وإستخدام نفس تعريف المادة في إتفاقية الأمم المتحدة لمكافحة الفساد الموقعة في يناير 2015 م والتي تجرم الفعل بإعتباره ثراء حراماً، لتخفيض الدرجة من التجريم إلى مجرد إشتباه يمنع العقاب عليه، ويحول المادة المذكورة، إلى مجرد لغو لا قيمة له- ا
- (5) المادة 6و7من قانون مكافحة الثراء الحرام والمشبوه لسنة1989م
- (6) الآيتان 34و35من سورة التوبة
- (7) سورة البقرة:الاية275
- (8) يوسف حامد العالم-المرجع السابق، ص515
- (9) الفيروز ابادي-مرجع سابق، ج2، ص13
- (10) رواه مسلم.في صحيحه-كتاب المساقاة حديث رقم- (1605) -ج4
- (11) ورد عند الشوكاني في نيل الاوطار -مرجع سابق، ج5، ص245
- (12) الإمام أبو عبد الله محمد بن أحمد الأنصاري القرطبي مرجع سابق ، ج3/ ص53
- (13) سورة المائدة:الاية:90-91
- (14) يوسف حامد العالم-مرجع سابق، ص176
- (15) سورة الحشر:الاية:7
- (16) سوؤة البقرة الاية:282-283
- (17) استبرأ لدينه: أي: طلب التبري من التهمة والخلاص منها. مضغة: القطعة من اللحم بقدر اللقمة التي يمضغها الإنسان.انظر شرح الحديث في صحيح البخاري، ج1 حديث رقم117 - أخرج البخاري في صحيحه : ج1/ 117) في الإيمان، باب: فضل مَن استبرأ لدينه، ومسلم في صحيحه برقم: (1599) في المساقاة، باب: أخذ الحلال وترك الشبهات، وأخرج أبو داود، والترمذي، والنسائي جزءاً منه.
- (18) صلاح نجيب الدق: ظاهرة الغش التجاري في الشريعة الاسلامية، 2016م ط.د، ص112
- (19) بن القيم الجوزية - باب السعادة-مرجع سابق، ص132
- (20) فتاوى الشيخ عطية صقر - ج2- طبعة المكتبة التوفيقية، جدة2007م ص 259 - فتوى رقم: 580 -
- (21) الراغب الاصفهاني: الذريعة إلى مكارم الشريعة ، دار المعارف، بيروت 1985م تحقيق /محمد جادي- ص211

- (22) ناجم محمد التميمي: احكام الضرائب في النظام الاسلامي، دار البيان، دبي 2014م ص12
- (23) فتاوى اللجنة الدائمة - المجموعة الأولى: اللجنة الدائمة للبحوث العلمية والإفتاء جمع وترتيب: أحمد بن عبد الرزاق الدويش- رئاسة إدارة البحوث العلمية والإفتاء - الإدارة العامة للطبع 2010م ج7- الرياض ص314
- (24) الطبراني هو: سليمان بن أحمد الطبراني (260 هـ / 821م - 360 هـ / 918م، أحد علماء وأئمة أهل السنة والجماعة. هو أبو القاسم، سليمان بن أحمد بن أيوب بن مطير اللّخمي الشامي الطبراني، وسمي الطبراني نسبة إلى طبرية الشام قسبة كورة الأردن. ولد في شهر صفر سنة 260 هـ (821م) بعكا بفلسطين من أم عكاوية، هو أحد رواة الحديث المشهورين وعلمائه. المصدر: الحافظ أبو عبد الله شمس الدين الذهبي- مرجع سابق، ص130
- (25) الراغب الاصفهاني- مرجع سابق، ص221
- (26) رواه أبو داود في سننه/ج3، حديث رقم1114
- (27) سورة التوبة الاية:41
- (28) سورة النساء الاية: 95
- (29) أخرجه البخاري في كتاب: الزكاة، باب: لا صدقة إلا عن ظهر غنى، ج3 حديث رقم 1427 وهو عن أبي هريرة وحده في نفس الموضع .
- (30) يوسف حامد العالم-مرجع سابق، ص200
- (31) سورة التوبة الاية103
- (32) يوسف حامد العالم-المرجع السابق، ص201
- (33) فتاوى اللجنة الدائمة - المجموعة الأولى ج7- مرجع سابق، ص314
- (34) ناجم محمد التميمي- مرجع سابق، ص122
- (35) سورة الطلاق:الاية7
- (36) المادة6 من قانون الزكاة لسنة2007م
- (37) سورة التوبة الاية103
- (38) محمد بن مكرم جمال الدين بن منظور الثعالبي:مرجع سابق، ج6/ ص4686
- (39) قانون التجارة وحماية المستهلك بولاية الخرطوم لسنة2012م المادة3منه
- (40) محمد المصطفى موسى، ورقه مقدمة للندوة العلمية حول حماية المستهلك العربي بين الواقع وآليات تطبيق القانون، المركز العربي للبحوث القانونية والقضائية جامعة الدول العربية بيروت 02-
- 2014/06/04م ص3
- (41) متفق عليه اخرجه البخاري في الصحيح، ج5، حديث رقم1214

- (42) سبق تخريجه
- (43) سورة المطففين: الآية 3
- (44) المادة 28 من دستور السودان الانتقالي لسنة 2005م
- (45) المحاكم الهندية قضت أن حق الحياة (Right to Life) لا يشمل فقط الحق في الحياة بمعناها الحرفي ،
أما يشمل حق العيش في كرامة إنسانية- انظر محمد المصطفى موسى، مرجع سابق، ص 5
- (46) محمد بن مكرم جمال الدين بن منظور الثعالبي- مرجع سابق، ج 2، ص 949
- (47) المادة 2 من قانون تنظيم المنافسة ومنع الاحتكار 2009م
- (48) علاء الدين ابوبكر بن مسعود الكاساني-، بدائع الصنائع في ترتيب الشرائع، ج 5، 1978م القاهرة دار
المنار ص 129
- (49) ابو زكريا يحيى بن شرف النووي: روضة الطالبين ، طبعة دار الفكر، دمشق سوريا ت. د، ج 3، ص 38
- (50) المادة 8 و 7 و 5 و 14 من قانون تنظيم المنافسة ومنع الاحتكار 2009م والاساليب التي تقيد حرية
المستهلك كما وردت في هذه المادة ، مثل: مثل: جعل التثمين الموضوعي للسلعة أو الخدمة أو
العروض الخاصة بها أكثر صعوبة او جعل المقارنة الموضوعية بين سلعة أو خدمة أخرى مماثلة لها
والعروض الأخرى أكثر صعوبة.
- (51) المادة 3 من قانون المواصفات والمقاييس 2008م
- (52) كما ان القانون نص على انشاء لجنة الإعتماد بدخل الهيئة السودانية للمواصفات والمقاييس
تقوم بدور ريادي مساعد للهيئة ولجنة الإعتماد تتولى إعتماد مختبرات الفحص والجهات المانحة
لشهادات المطابقة وتقييمها ومراقبتها وفقاً للممارسات الوطنية والإقليمية والدولية المتبعة وتحدد
اللوائح إجراءات عمل اللجنة و تشكل اللجنة بقرار من مجلس الوزراء بناءً على توصية المجلس
من العلماء والخبراء في مجال إعتماد المختبرات ويحدد القرار اختصاصات اللجنة وإجراءات عملها
ومكافآت أعضائها - انظر المادة 19 من قانون المواصفات والمقاييس 2008م
- (53) المادة 4 من قانون المواصفات والمقاييس 2008م
- (54) المادة 14 من قانون المواصفات والمقاييس 2008م
- (55) المادة 2 من القانون القومي لحماية المستهلك لسنة 2018م
- (56) فضل الله برمة: مقالة منشورة عبر الموقع الرسمي لحزب الامة القومي، الخرطوم 2018م اطلع عليه
بتصرف 2019/9/22م
- (57) سورة الاعراف : الآية: 85
- (58) سورة الرحمن : الآية 7
- (59) سورة النساء: الآية 29

- (60) حديث حسن: رواه الترمذي في سننه، كتاب البيوع، باب ما جاء في التجار، ص288
- (61) حديث صحيح : رواه احمد في مسنده ج2، ص413 من حديث ابي هريرة -السنن الكبرى للبيهقي ج5، ص265 من نفس طريق الامام احمد
- (62) محمد بن تيمية الحراني:..مرجع سابق، ص32
- (63) محمد بن تيمية الحراني: المرجع السابق..ص285

A system of Integral Equations Via Measure of Non-Compactness Existence of Solutions in Banach` Spaces

Dr. Nagla Tag Elsir Mohamed Elhassan

Omdurman Islamic University - Faculty
of post Graduate Studies Faculty of
Science - Department of Mathematic

Abstract:

This study aims to show important Solutions, possible applications, in the system of Integral Equations Via Measure of Non-Compactness and Existence of Solutions in Banach` Spaces. and present some results on the existence of coupled fixed points for a class of condensing operators in Banach spaces. Moreover, as an application, we study the problem of existence of solutions for system of nonlinear integral equations uniformly, then the system of equations has at least one solution in the space.

Keywords: space /Measure of non-compactness/Fixed point theorem/Integral

المستخلص

نهدف هذه الدراسة إلى إظهار الحلول المهمة والتطبيقات الممكنة في نظام المعادلات التكاملية عبر قياس عدم الانضغاط ووجود الحلول في فضاءات باناخ. وقدم بعض النتائج حول وجود نقاط ثابتة مقترنة لفئة من عوامل التكثيف في فضاءات باناخ. علاوة على ذلك، كتطبيق، ندرس مشكلة وجود حلول لنظام المعادلات التكاملية غير الخطية بشكل موحد، ثم نظام المعادلات التي لديها حل واحد على الأقل في الفضاء.

الكلمات المفتاحية: الفضاء / قياس عدم التوافق / نظرية النقطة الثابتة / التكامل

1.0 Introduction:

Recently, there have been several successful efforts to apply the concept of measure of no compactness in the study of the existence and behavior of solutions of nonlinear differential and integral equations ([21, 11, 12, 13, 15, 5, 16, 23,24, 25, 26, 17, 27, 29]). In , we present and prove some new existence theorems for solutions of systems of nonlinear equations which are formulated in terms of condensing operators in Banach spaces (i.e. mappings under which the image of any set is in a certain sense more compact than the set itself ⁽¹⁾). Moreover, as an application, we study the problem of existence of solutions for the following system of nonlinear integral equation

$$\begin{cases} x(t) = f_1(t, x(\zeta_1(t)), y(\zeta_1(t)), \int_0^{\beta_1(t)} g_1(t, s, x(\eta_1(s)), y(\eta_1(s))) ds) \\ y(t) = f_2(t, x(\zeta_2(t)), y(\zeta_2(t)), \int_0^{\beta_2(t)} g_2(t, s, x(\eta_2(s)), y(\eta_2(s))) ds) \end{cases} \quad (1)$$

where $f_i, g_i, \zeta_i, \eta_i$ and β_i satisfy certain condition

1.1 Objective of the Study

This study aims to fulfill the following objective:

show important Solutions, possible applications, in the system of Integral Equations Via Measure of Non-Compactness and Existence of Solutions in Banach Spaces.

1.2 The importance of the study:

The importance of this study is the:

1. prove some existence theorems for systems of equations involving condensing operators using the Darbo fixed point theorem.
2. investigate the problem of existence of solutions for the system of nonlinear integral equation.

2.1 Preliminaries:

We some basic notations, definitions and auxiliary devoted to state and prove some existence theorems for systems of equations involving condensing operators using the Darbo fixed point theorem. Finally, using the obtained results, we investigate the problem of existence of solutions for the system of nonlinear integral equation (1).

The first measure of non-compactness was defined by Kuratowski ⁽²⁾. In a metric space X and for a bounded subset S of X the Kuratowski measure of noncompactness is defined as

$$\alpha(S) := \inf \left\{ \delta > 0 \mid S = \bigcup_{i=1}^n S_i \text{ for some } S_i \text{ with } \text{diam}(S_i) \leq \delta \text{ for } 1 \leq i \leq n \leq \infty \right\} \quad (2)$$

Here $\text{diam}(T)$ denotes the diameter of a set $T \subset X$, i.e.,

$$\text{diam}(T) := \sup \{d(x, y) \mid x, y \in T\}.$$

Another important measure of non-compactness is the so-called Hausdorff (or ball) measure of non-compactness defined as

$$\chi(X) = \inf \{ \varepsilon : X \text{ has a finite } \varepsilon - \text{net in } E \}.$$

Since a ball of radius r has diameter at most $2r$, then the measures χ and α are equivalent i.e., for any bounded subset X of E the following estimate holds⁽³⁾

$$\chi(X) \leq \alpha(X) \leq 2\chi(X).$$

The two measures χ and α share many properties [8, 5]. Here, we recall some basic facts concerning measures of non-compactness from [5], which is defined axiomatically in terms of some natural conditions. Denote by $\mathbb{R}$ the set of real numbers and put $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Let $(E, \|\cdot\|)$ be a Banach space. The symbol $\bar{X}$, $\text{Conv}X$ will denote the closure and closed convex hull of a subset X of E , respectively. Moreover, let $\mathfrak{M}_E$ indicate the family of all nonempty and bounded subsets of E and $\mathfrak{N}_E$ indicate the family of all nonempty and relatively compact subsets⁽⁴⁾.

Definition (1): A mapping $\mu: \mathfrak{M}_E \rightarrow \mathbb{R}_+$ is said to be a measure of noncompactness in E if it satisfies the following conditions⁽⁵⁾:

- (i) The family $\ker \mu = \{X \in \mathfrak{M}_E : \mu(X) = 0\}$ is nonempty and $\ker \mu \subseteq \mathfrak{N}_E$.
- (ii) $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$.
- (iii) $\mu(\bar{X}) = \mu(X)$.
- (iv) $\mu(\text{Conv}X) = \mu(X)$.
- (v) $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$ for $\lambda \in [0,1]$.
- (vi) If $\{X_n\}_n$ is a sequence of closed sets from $\mathfrak{M}_E$ such that $X_{n+1} \subset X_n$ for $n = 1, 2, \dots$ and if $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_n) = 0$ then $X_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty X_n = \emptyset$.

Here we recall the well-known fixed point theorem of Darbo⁽⁶⁾.

Definition (2)⁽⁷⁾: An element $(x, y) \in X \times X$ is called a coupled fixed point of the mapping $F: X \times X \rightarrow X$ if $F(x, y) = x$ and $F(y, x) = y$.

Note that if $F: C \times C \rightarrow C$ is a continuous operator and we define $F_1(x, y) = F(x, y)$ and $F_2(x, y) = F(y, x)$ then as a result of Theorem (1) and Corollary (1) we have the main results .

3.1 Main results:

In this section, we state and prove some existence results for solutions of systems of equations Via Measure of Non-Compactness and Existence of Solutions in Banach` Spaces which will be used in Section

Theorem (1)⁽⁸⁾: Let Ω be a nonempty, bounded, closed and convex subset of a space E and let $F: \Omega \rightarrow \Omega$ be a continuous mapping such that there exists a constant $k \in [0,1]$ with the property

$$\mu(FX) \leq k\mu(X)$$

for any nonempty subset X of Ω . Then F has a fixed point in the set Ω .

The following theorem and example are basic to prove all the results of this work.

Theorem (2)⁽⁹⁾: Suppose $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ are measures in $E_1, E_2, \dots, E_n$, respectively. Moreover, assume that the function $F: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ is convex and $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ if and only if $x_i = 0$ for $i = 1, 2, \dots, n$. Then

$$\mu(X) = F(\mu_1(X_1), \mu_2(X_2), \dots, \mu_n(X_n))$$

defines a measure of non-compactness in $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ where X_i denotes the natural projection of X into E_i for $i = 1, 2, \dots, n$.

As results from Theorem (1.3.2) we present the following example.

Theorem (3)⁽¹⁰⁾: Let C be a nonempty, bounded and closed subset of a Banach space E and μ an arbitrary measure of noncompactness on E . If $f_i: C \times C \rightarrow C$ for $i = 1, 2$ are continuous operators and there exists a constant $k \in [0, 1)$ such that

$$\mu(F_i(X_1 \times X_2)) \leq k \max\{\mu(X_1), \mu(X_2)\} \quad (3)$$

for any subset X_1, X_2 of C , then there exist $x^*, y^* \in X$ such that

$$\begin{cases} F_1(x^*, y^*) = x^*, \\ F_2(x^*, y^*) = y^*. \end{cases} \quad (4)$$

Proof: Consider the operator $\tilde{F}: C \times C \rightarrow C \times C$ defined by

$$\tilde{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)).$$

Theorem(4)⁽¹¹⁾: Let C be a nonempty, bounded and closed subset of a Banach space E and μ an arbitrary measure of noncompactness on E . If $F_i: C^n \rightarrow C, i = 1, \dots, n$ are continuous operators for which there exists a constant $k \in [0, 1)$ such that

$$\mu(F_i(X_1 \times \dots \times X_n)) \leq k \max\{\mu(X_1), \dots, \mu(X_n)\}$$

for any subset $X_1, \dots, X_n$ of C . Then there exist $x_1^*, \dots, x_n^* \in X$ such that

$$\begin{cases} F_1(x_1^*, \dots, x_n^*) = x_1^* \\ \vdots \\ F_n(x_1^*, \dots, x_n^*) = x_n^* \end{cases}$$

Proof: Define $\tilde{F}(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$ and follow the proof of Theorem (1.3.5).

as an application of Theorem (1.3.5), we prove an existence result for solutions of system (25). We will work in the Banach space $BC(\mathbb{R}_+)$ consisting of all real functions defined, bounded and continuous on $\mathbb{R}_+$. The space $BC(\mathbb{R}_+)$ is furnished with the standard supremum norm i.e., the norm defined by the formula

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|: t \geq 0\}.$$

We will use a measure of non-compactness in the space $BC(\mathbb{R}_+)$ which is stated in ([8,9]). In order to define this measure, let us fix a nonempty bounded subset of X of $BC(\mathbb{R}_+)$ and a positive number $L > 0$. For $x \in X$ and $\varepsilon \geq 0$ denote by $\omega^L(x, \varepsilon)$, the modulus of continuity of x on the interval $[0, L]$, i.e,

$$\omega^L(x, \varepsilon) = \sup\{|x(t) - x(s)|: t, s \in [0, L], |t - s| \geq \varepsilon\}.$$

Moreover, let us put

$$\omega^L(X, \varepsilon) = \sup\{\omega^L(x, \varepsilon): x \in X\}$$

$$\omega_0^L(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega^L(X, \varepsilon),$$

$$\omega_0(X) = \lim_{L \rightarrow \infty} \omega_0^L(X).$$

If t is a fixed number from $\mathbb{R}_+$, let us denote

$$X(t) = \{x(t): x \in X\}.$$

Finally, consider the function μ defined on $\mathcal{M}_{BC(\mathbb{R}_+)}$ by the formula

$$\mu(X) = \omega_0(X) + \limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam } X(t).$$

Where

$$\text{diam } X(t) = \sup\{|x(t) - y(t)|: x, y \in X\}.$$

It can be shown (cf. [5,16]) that the function $\mu(X)$ defines a measure of noncompactness on $BC(\mathbb{R}_+)$ in the sense of the above accepted definition.

Now, we are ready to state and prove the main on the existence of solutions for the system of integral equations (1).

Theorem (5) ⁽¹²⁾: Assume that the following conditions are satisfied:

- (i) $\xi_i, \eta_i, \beta_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ (i = 1, 2)$ are continuous and $\xi_i(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ for $i = 1, 2$,

(ii) $f_i: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for $i = 1, 2$ are continuous. Moreover, there exist constant $k \in (0, 1)$ and nondecreasing continuous functions

$\Phi_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ with $\Phi_i(0) = 0, i = 1, 2$, such that

$$|f_i(t, x, y, z) - f_i(t, u, v, w)| \leq k \max\{|x - u|, |y - v|\} + \Phi_i(m_i(t)|z - w|) \quad (5)$$

where $m_i(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ are continuous functions.

(iii) The functions $|f_i(t, 0, 0, 0)|$ for $i = 1, 2$ are bounded on $\mathbb{R}_+$, i.e.

$$M_i = \sup\{f_i(t, 0, 0, 0): t \in \mathbb{R}_+\} < \infty. \quad (6)$$

(iv) $g_i: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for $i = 1, 2$ are continuous and there exists a positive constant D such that

$$\sup\{m_i(t) \left| \int_0^{\beta_i} g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) ds \right| : t \in \mathbb{R}_+, x, y \in BC(\mathbb{R}_+), 1 \leq i \leq 2\} < D. \quad (7)$$

Moreover,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_i(t) \left| \int_0^{\beta_i} [g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) - g_i(t, s, u(\eta_i(s)), v(\eta_i(s)))] ds \right| = 0 \quad (8)$$

Corollary (1) ⁽¹³⁾: Let C be a nonempty, bounded and closed subset of a Banach space E and an arbitrary measure of non-compactness on E . If $F_i: C \times C \rightarrow C$ for $i = 1, 2$ are continuous operators for which there exist nonnegative constants k_1, k_2 with $k_1 + k_2 < 1$ such that

$$\mu(F_i(X_1 \times X_2)) \leq k_1 \mu(X_1) + k_2 \mu(X_2) \quad (9)$$

for any subsets X_1, X_2 of C , then there exist $x^*, y^* \in X$ such that

$$\begin{cases} F_1(x^*, y^*) = x^*, \\ F_2(x^*, y^*) = y^*. \end{cases}$$

Proof: It is enough to show that (27) holds. Let $k_1, k_2 \in C$ be given, then

$$\begin{aligned} \mu(F_i(X_1 \times X_2)) &\leq k_1 \mu(X_1) + k_2 \mu(X_2) \\ &\leq k_1 \max\{\mu(X_1), \mu(X_2)\} + k_2 \max\{\mu(X_1), \mu(X_2)\} \\ &\leq (k_1 + k_2) \max\{\mu(X_1), \mu(X_2)\}. \end{aligned}$$

Now the conclusion follows from Theorem (2).

Corollary (2)⁽¹⁴⁾ : Let $\mathcal{C}$ be a nonempty, bounded and closed subset of a Banach space E , μ an arbitrary measure of non-compactness on E and $F: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ a continuous operator. Suppose either:

(I) There exist nonnegative constants k_1, k_2 with $k_1, k_2 < 1$ such that

$$\mu(F(X_1 \times X_2)) \leq k_1 \mu(X_1) + k_2 \mu(X_2),$$

or

(II) There exists a constant $k \in [0, 1)$ such that

$$\mu(F(X_1 \times X_2)) \leq k \max\{\mu(X_1), \mu(X_2)\}$$

for any subset X_1, X_2 of $\mathcal{C}$. Then F has a coupled fixed point.

Proof: Take $F_1(x, y) = F_2(x, y) = F(x, y)$ in Theorem (1) and Corollary (1).

Corollary (3)⁽¹⁵⁾: Let $\mathcal{C}$ be a nonempty, bounded, closed and convex subset of a Banach space E and let $F_i: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow E$ for $i = 1, 2$ be operators such that

$$\|F_i(x, y) - F_i(u, v)\| \leq k \max\{\|x - u\|, \|y - v\|\}, \quad (10)$$

where $k \in [0, 1)$. Assume that $G_i: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow X$ are compact and continuous operators and the operators $T_i: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ defined by

$$\|T_i(x, y) - T_i(u, v)\| \leq \|F_i(x, y) - F_i(u, v)\| + \Phi(\|G_i(x, y) - G_i(u, v)\|) \quad (11)$$

for $i = 1, 2$ where $\Phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ is a nondecreasing continuous function and $\Phi(0) = 0$. Then there exist $x^*, y^* \in \mathcal{C}$ such that

$$\begin{cases} T_1(x^*, y^*) = x^*, \\ T_2(x^*, y^*) = y^*. \end{cases}$$

Proof: Let X_1 and X_2 be arbitrary subsets of $\mathcal{C}$ and fixed $1 \leq i \leq 2$. By the definition of Kuratowski measure of non-compactness for every $\varepsilon > 0$ there exist $S_1, \dots, S_n$ such that $X_1 \times X_2 \subseteq \bigcup_{k=1}^n S_k$,

$$\text{diam}(F_i(S_k)) < \alpha(F_i(X_1 \times X_2)) + \varepsilon$$

and

$$\text{diam}(G_i(S_k)) < \varepsilon.$$

Let us fix arbitrarily $1 \leq k \leq n$. Then for every $p, q \in S_k$ we have

$$\|T_i(p) - T_i(q)\| \leq \|F_i(p) - F_i(q)\| + \Phi(\|G_i(p) - G_i(q)\|).$$

Thus, by properties of Φ we obtain

$$\text{diam}(T_i(S_k)) \leq \text{diam}(F_i(S_k)) + \Phi(\text{diam}(G_i(S_k))),$$

$$\text{diam}(T_i(S_k)) \leq \alpha(F_i(X_1 \times X_2)) + \varepsilon + \Phi(\varepsilon)$$

and since ε was chosen arbitrarily and Φ is a nondecreasing continuous function, so

$$\alpha(T_i(X_1 \times X_2)) \leq \alpha(F_i(X_1 \times X_2)). \quad (12)$$

Now we show that T_i satisfies (27). To do this fix arbitrary $x, y \in X_1$ and $u, v \in X_2$. Then we have

$$\begin{aligned} \|F_i(x, y) - F_i(u, v)\| &\leq k \max\{\|x - u\|, \|y - v\|\} \\ &\leq k \max\{\text{diam} X_1, \text{diam} X_2\} \end{aligned}$$

so

$$\text{diam}(F_i(X_1 \times X_2)) \leq k \max\{\text{diam} X_1, \text{diam} X_2\}$$

Therefore, by definition of Kuratowski measure of non-compactness we have

$$\alpha(F_i(X_1 \times X_2)) \leq k \max\{\alpha(X_1), \alpha(X_2)\} \quad (13)$$

By (32) and (33) we deduce

$$\alpha(T_i(X_1 \times X_2)) \leq k \max\{\alpha(X_1), \alpha(X_2)\}.$$

Also, by condition (11), T_i ($i = 1, 2$) are continuous operators and the application of Theorem (1) completes the proof.

In the same way as the above proof, we can extend Theorem (1) for n -dimensional systems of equations

Example (1) shows that $\tilde{\mu}(X) = \max\{\mu(X_1), \mu(X_2)\}$ is a measure of non-compactness in the space $C \times C$, where $X_i, i = 1, 2$ denote the natural projections of X . Now let X be any nonempty subset of $X, i = 1, 2$. Then by (ii) and (3) we obtain

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\tilde{F}(X)) &\leq \tilde{\mu}(F_1(X_1 \times X_2) \times F_2(X_1 \times X_2)) \\ &= \max\{\mu(F_1(X_1 \times X_2)), \mu(F_2(X_1 \times X_2))\} \\ &\leq \max\{k \max\{\mu(X_1), \mu(X_2)\}, k \max\{\mu(X_2), \mu(X_1)\}\} \\ &\leq k \tilde{\mu}(X) \end{aligned}$$

Since $\tilde{\mu}$ is also a measure of noncompactness, therefore all conditions of Theorem (1.3.3) are satisfied. Hence $\tilde{F}$ has a fixed point, i.e., there exist $x^*, y^* \in X$ such that

$$(x^*, y^*) = \tilde{F}(x^*, y^*) = (F_1(x^*, y^*), F_2(x^*, y^*)),$$

which means (x^*, y^*) solves (10).

Example (2):⁽¹⁶⁾ Let μ be a measure of non-compactness, considering $F_1(x, y) = \max\{x, y\}$ and $F_2(x, y) = x + y$ for any $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ then all the conditions of Theorem (1.3.2) are satisfied. Therefore, $\tilde{\mu}_1 = \max\{\mu(X_1), \mu(X_2)\}$ and $\tilde{\mu}_2 = \mu(X_1) + \mu(X_2)$ are measures of non-compactness in the space $E \times E$ where $X_i, i = 1, 2$ denote the natural projections of X .

we state and prove some existence results for solutions of systems of equations involving condensing operators in Banach spaces which will be used.

4.1 Application:

uniformly with respect to $x, y, u, v \in BC(\mathbb{R}_+)$ for $i = 1, 2$.

Then the system of equations (1) has at least one solution in the space $BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$.

Proof: The proof is carried out in two steps.

Step 1: $G_i: BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+) \rightarrow BC(\mathbb{R}_+)$ defined by

$$G_i(x, y)(t) = m_i(t) \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) ds \quad (14)$$

for $i = 1, 2$ are compact and continuous operators.

Let $1 \leq i \leq 2$ be fixed. Notice that the continuity of $G_i(x, y)(t)$ for any $x \in BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$ is obvious. Moreover, by (12), G_i is an operator on $BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$ into $BC(\mathbb{R}_+)$. Now, we show that G_i is continuous. For this, take $x, y \in BC(\mathbb{R}_+)$ and $\varepsilon > 0$ arbitrarily, and consider $u, v \in BC(\mathbb{R}_+)$ with $\|x - u\| < \varepsilon$ and $\|y - v\| < \varepsilon$. Then we have

$$\begin{aligned} |G_i(x, y)(t) - G_i(u, v)(t)| &\leq m_i(t) \left| \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, u(\eta_i(s)), v(\eta_i(s))) ds \right| \\ &\leq m_i(t) \left| \int_0^{\beta_i(t)} [g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) \right. \\ &\quad \left. - g_i(t, s, u(\eta_i(s)), v(\eta_i(s)))] ds \right|. \end{aligned}$$

Furthermore, considering condition (iv), there exists $T > 0$ such that for $t > T$ we have

$$|G_i(x, y)(t) - G_i(u, v)(t)| \leq \varepsilon. \quad (15)$$

Also, if $t \in [0, T]$, then from (39) it follows that

$$|G_i(x, y)(t) - G_i(u, v)(t)| \leq m_T \beta_T \vartheta(\varepsilon),$$

where

$$\beta_T = \sup\{\beta_i(t) : t \in [0, T], 1 \leq i \leq 2\}$$

$$m_T = \sup\{m_i(t) : t \in [0, T], 1 \leq i \leq 2\}$$

$$b = \max\{\|x\|, \|y\|\} + \varepsilon$$

$$\vartheta(\varepsilon) = \sup\{|g_i(t, s, x, y) - g_i(t, s, u, v)| : t \in [0, T], s \in [0, \beta_T], \\ x, y, u, v \in [-b, b], |x - u| \leq \varepsilon, |y - v| \leq \varepsilon\}$$

By using the continuity of g_i on the compact set $[0, T] \times [0, \beta_T] \times [-b, b] \times [-b, b]$, we have $\vartheta(\varepsilon) \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. Thus, G_i is a continuous function from $BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$ into $BC(\mathbb{R}_+)$.

Now, Let X_1, X_2 be two nonempty and bounded subsets of $BC(\mathbb{R}_+)$, and assume that $T > 0$ and $\varepsilon > 0$ are chosen arbitrarily. Let $t_1, t_2 \in [0, T]$, with $|t_2 - t_1| \leq \varepsilon$ and $x, y \in X$, we obtain

$$\begin{aligned} & |G_i(x, y)(t_2) - G_i(u, v)(t_1)| \leq \\ & \leq \left| m_i(t_1) \int_0^{\beta_i(t_2)} g_i(t_2, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) ds \right. \\ & \quad \left. - m_i(t_2) \int_0^{\beta_i(t_2)} g_i(t_1, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) ds \right| \\ & \leq m_T \left| \int_0^{\beta_i(t_2)} [g_i(t_2, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) \right. \\ & \quad \left. - g_i(t_1, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s)))] ds \right| \quad (16) \\ & \quad + m_T \left| \int_{\beta_i(t_2)}^{\beta_i(t_2)} g_i(t_1, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) ds \right| \\ & \leq m_T \beta_T \omega_r^T(g_i, \varepsilon) + m_T U_r^T \omega^T(\beta_i, \varepsilon), \end{aligned}$$

where

$$r = \max\{\sup\{\|x\| : x \in X_1\}, \sup\{\|x\| : x \in X_2\}\}$$

$$\omega^T(\beta_i, \varepsilon) = \{|\beta_i(t_1) - \beta_i(t_2)| : t_1, t_2 \in [0, T], |t_1 - t_2| \leq \varepsilon\}$$

$$\omega_r^T(g_i, \varepsilon) = \sup\{|g_i(t_2, s, x, y) - g_i(t_1, s, x, y)| : t_1, t_2 \in [0, T], |t_2 - t_1| \leq \varepsilon\}$$

$$x, y \in [-r, r], s \in [0, \beta_T]$$

$$U_r^T = \sup\{|g_i(t, s, x, y)| : t \in [0, T], s \in [0, \beta_T], x, y \in [-r, r]\}.$$

Since (x, y) was an arbitrary element of $X_1 \times X_2$ in (40), so we obtain

$$\omega^T(G_i(X_1 \times X_2), \varepsilon) \leq m_T \beta_T \omega_r^T(g_i, \varepsilon) + m_T U_r^T \omega^T(\beta_T, \varepsilon) \quad (17)$$

On the other hand by the uniform continuity of g_i on $[0, T] \times [0, \beta_T] \times [-r, r] \times [-r, r]$, we have $\omega_r^T(g_i, \varepsilon) \rightarrow 0$, as $\varepsilon \rightarrow 0$ and also because of the uniform continuity of β on $[0, T]$, we derive that $\omega_r^T(\beta, \varepsilon) \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. Therefore we obtain

$$m_T \beta_T \omega_r^T(g_i, \varepsilon) + m_T U_r^T \omega^T(\beta_T, \varepsilon) \rightarrow 0,$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$ and

$$\omega_0^T(G_i(X_1 \times X_2)) = 0,$$

therefore

$$\omega_0(G_i(X_1 \times X_2)) = 0. \quad (18)$$

Finally, for arbitrary $(x, y), (u, v) \in X_1 \times X_2$ and $t \in \mathbb{R}_+$ we get

$$|G_i(x, y)(t) - G_i(u, v)(t)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq m_i(t) \left| \int_0^{\beta_i(t)} [g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) \right. \\ &\quad \left. - g_i(t, s, u(\eta_i(s)), v(\eta_i(s)))] ds \right| \quad (19) \\ &\leq m_i(t) \theta_i(t), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \theta_i(t) = \sup \left\{ \left| \int_0^{\beta_i(t)} [g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) \right. \right. \\ \left. \left. - g_i(t, s, u(\eta_i(s)), v(\eta_i(s)))] ds \right| : x, y, u, v \in BC(\mathbb{R}_+) \right\} \end{aligned}$$

Since $(x, y), (u, v)$ and t were chosen arbitrarily in (43), we conclude that

$$\text{diam} G_i(X_1 \times X_2)(t) \leq m(t) \theta(t). \quad (20)$$

Taking $t \rightarrow \infty$ in the inequality (44), then using (iv) we deduce that

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam} G_i(X_1 \times X_2)(t) = 0. \quad (21)$$

Further, combining (42) and (45) we get

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \text{diam} G_i(X_1 \times X_2)(t) + \omega_0(G_i(X_1 \times X_2)) = 0$$

or, equivalently

$$\mu(G_i(X_1 \times X_2)) = 0.$$

Thus, G_i is a compact and continuous operator.

Step 2: There exists $r_0 \in \mathbb{R}_+$ such that the operators $T_i: \bar{B}_{r_0} \times \bar{B}_{r_0} \rightarrow \bar{B}_{r_0}$ ($i = 1, 2$) defined by

$$T_i(x, y)(t) = f_i \left(t, x(\xi(t)), y(\xi(t)), \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, x(\eta(s)), y(\eta(s))) ds \right) \quad (22)$$

are well defined and satisfy condition (31) where G_i is given by (38) and

$$F_i(x, y)(t) = k \max\{x(t), y(t)\},$$

for $i = 1, 2$.

Using conditions (i)-(iv), for arbitrarily fixed $t \in \mathbb{R}_+$ and $i = 1, 2$ we get

$$\begin{aligned} & |T_i(x, y)(t)| \leq \\ & \leq \left| f_i \left(t, x(\xi_i(t)), y(\xi_i(t)), \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) ds \right) - f_i(t, 0, 0, 0) \right| \\ & \quad + |f_i(t, 0, 0, 0)| \\ & \leq k \max\{|x(\xi_i(t))|, |y(\xi_i(t))|\} + |f_i(t, 0, 0, 0)| \\ & + \Phi_i \left(m_i(t) \left| \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) ds \right| \right) \\ & \leq k \max\{\|x\|, \|y\|\} + M_i + \Phi_i(D), \end{aligned} \quad (24)$$

therefore,

$$\|T_i(x, y)\| \leq k \max\{\|x\|, \|y\|\} + M_i + \Phi_i(D). \quad (25)$$

Thus, from the estimate (48) we have $T_i(\bar{B}_{r_0} \times \bar{B}_{r_0}) \subseteq \bar{B}_{r_0}$ for

$$r_0 = \max \left\{ \frac{M_1 + \Phi_1(D)}{1 - k}, \frac{M_2 + \Phi_2(D)}{1 - k} \right\}.$$

Next, by condition (ii) of Theorem (1.3.11), it is obvious that F_i and $F_i(x)$ for $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ are continuous functions on $BC(\mathbb{R}_+)$ and $\mathbb{R}_+$, respectively, and for $i = 1, 2, x, y, u, v \in BC(\mathbb{R}_+)$ and $t \in \mathbb{R}_+$ we have

$$\begin{aligned} & |T_i(x, y)(t) - T_i(u, v)(t)| = \\ & = \left| f_i \left(t, x(\xi_i(t)), y(\xi_i(t)), \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) ds \right) \right. \\ & \quad \left. - f_i \left(t, u(\xi_i(t)), v(\xi_i(t)), \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, u(\eta_i(s)), v(\eta_i(s))) ds \right) \right| \\ & \leq k \max\{|x(t) - u(t)|, |y(t) - v(t)|\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Phi \left(m_i(t) \left| \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, x(\eta_i(s)), y(\eta_i(s))) ds \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, u(\eta_i(s)), v(\eta_i(s))) ds \right| \right) \\
& \leq |F_i(x, y)(t) - F_i(u, v)(t)| + \Phi(|G_i(x, y)(t) - G_i(u, v)(t)|) \\
& \leq |F_i(x, y) - F_i(u, v)| + \Phi(\|G_i(x, y) - G_i(u, v)\|)
\end{aligned}$$

therefore,

$$\|T_i(x, y) - T_i(u, v)\| \leq \|F_i(x, y) - F_i(u, v)\| + \Phi(\|G_i(x, y) - G_i(u, v)\|).$$

Obviously, F_i satisfies condition (10) and thus by Corollary (1.3.8), there exist $x_0, y_0 \in BC(\mathbb{R}_+)$ that are solutions of the system of integral equations (1), and the proof is complete.

In the same way as the above proof, we can extend Theorem (3) for finite system of nonlinear integral equation

$$\begin{aligned}
x_i(t) &= f_i(t, x_1(\xi_i(t)), \dots, x_n(\xi_i(t)), \\
&\int_0^{\beta_i(t)} g_i(t, s, x_1(\eta_i(s)), \dots, x_n(\eta_i(s))) ds)
\end{aligned}$$

where f_i, g_i, ξ_i, η_i and β_i satisfy certain conditions. As a corollary of Theorem (3) we have the main results of⁽¹⁷⁾.

Corollary⁽¹⁸⁾: Suppose that

(i) $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and the function $t \rightarrow f(t, 0, 0)$ is a member of the space $BC(\mathbb{R}_+)$;

(ii) there exists $k \in [0, 1]$ such that

$$|f(t, x, y) - f(t, u, v)| \leq \frac{k}{2}(|x - u| + |y - v|), \quad (26)$$

for any $t \geq 0$ and for all $x, y, u, v \in \mathbb{R}$;

(iii) the functions $\xi, \eta, q: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ are continuous and $\xi(t) \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$.

(iv) $h: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function and there exist $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ and a positive constant d such that

$$\int_0^{q(t)} |h(t, s, x_0, y_0)| ds \leq d \quad (27)$$

for all $t \in \mathbb{R}_+$. In addition,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{q(t)} \left| h(t, s, x(\eta(s)), y(\eta(s))) - h(t, s, u(\eta(s)), v(\eta(s))) \right| ds = 0 \quad (28)$$

$$\int_0^{q(t)} \left| h(t, s, x(\eta(s)), y(\eta(s))) - h(t, s, u(\eta(s)), v(\eta(s))) \right| ds \leq \infty \quad (29)$$

for any all $t \in \mathbb{R}_+$ and uniformly respect to $x, y, u, v \in BC(\mathbb{R}_+)$:

Then the system of equations

$$\begin{cases} x(t) = f(t, x(\xi(t)), y(\xi(t))) + \int_0^{q(t)} h(t, s, x(\eta(s)), y(\eta(s))) ds, \\ y(t) = f(t, y(\xi(t)), x(\xi(t))) + \int_0^{q(t)} h(t, s, y(\eta(s)), x(\eta(s))) ds, \end{cases} \quad (30)$$

has at least one solution in the space $BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$.

Proof: Take

$$f_1(t, x, y, z) = f(t, x, y) + z,$$

$$f_2(t, x, y, z) = f(t, y, x) + z,$$

$$g_1(t, s, x, y) = h(t, s, x, y),$$

$$g_2(t, s, x, y) = h(t, s, y, x),$$

in Theorem (1.3.11).

Now, we give an example where Theorem (3) can be applied but the previous results ⁽¹⁹⁾ are not applicable.

Example (1.3.13)⁽²⁰⁾: Consider the system of integral equations

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2(x(t) + y(t))}{2(1+t^4)} + \int_0^{t^2} \frac{s^2 \cos(sx(\sqrt{s})) + e^s (2 + \sin(x^4(\sqrt{x}) + y^4(\sqrt{s})))}{e^{t^2} (2 + \sin(x^4(\sqrt{x}) + y^4(\sqrt{s})))} ds \\ y(t) = \frac{\sin(t^2(x(t) + y(t)))}{2(1+t^4)} + \arctan \int_0^{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{1+sy(s)} + ts^{11}(1+x^4(s) + y^4(s))}{(1+t^7)(1+x^4(t) + y^4(t))} ds \end{cases}$$

where $t \in [0, \infty)$.

Eq. (54) is a special case of Eq. (25) where

$$\zeta_1(t) = \zeta_2(t) = \eta_2(t) = t, \quad \beta_1(t) = t^2, \beta_2(t) = \eta_1(t) = \sqrt{s}$$

$$f_1(t, x, y, z) = \frac{t^2(x+y)}{2(1+t^4)} + z,$$

$$f_2(t, x, y, z) = \frac{\sin(t^2(x+y))}{2(1+t^4)} + \arctan z,$$

$$g_1(t, s, x, y) = \frac{s^3 \cos(sx) + e^s (2 + \sin(x^4 + y^4))}{e^{t^2} (2 + \sin(x^4 + y^4))}$$

$$g_2(t, s, x, y) = \frac{\sqrt[4]{1+sy} + ts^{11}(1+x^4+y^4)}{(1+t^7)(1+x^4+y^4)}$$

Now we check all conditions of Theorem (3). It is clear that condition (i) is satisfied. Assume that $t \in \mathbb{R}_+$ and $x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R}$. Then we get

$$\begin{aligned} |f_1(t, x, y, z) - f_1(t, u, v, w)| &\leq \frac{t^2}{1+t^4} \frac{|x-u| + |y-v|}{2} + |z-w| \\ &\leq \frac{1}{2} \max\{|x-u| + |y-v|\} + |z-w| \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} |f_2(t, x, y, z) - f_2(t, u, v, w)| &\leq \frac{|\sin(t^2(x-u+y-v))|}{2(1+t^4)} \\ &\quad + |\arctan(z) - \arctan(w)| \\ &\leq \frac{1}{2} \max\{|x-u|, |y-v|\} + |z-w| \end{aligned}$$

Therefore f_1 and f_2 satisfy condition (ii) of Theorem (1.3.11) with $k = \frac{1}{2}$. Also it is clear that f_i and g_i are continuous and by simple calculation we obtain that

$$M_1 = \sup \left\{ \frac{t^2(0+0)}{2(1+t^4)} + 0 : t \in \mathbb{R}_+ \right\} = 0,$$

$$M_2 = \sup \left\{ \frac{\sin(t^2(0+0))}{2(1+t^4)} + 0 : t \in \mathbb{R}_+ \right\} = 0$$

$$\left| \frac{s^3 \cos(sx(\sqrt{s})) + e^s (2 + \sin(x^4(\sqrt{s}) + y^4(\sqrt{s})))}{e^{t^2} (2 + \sin(x^4(\sqrt{s}) + y^4(\sqrt{s})))} \right| \leq \left| \frac{s^3 + 2e^s}{e^{t^2}} \right|$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_0^{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{1+sx(s)} + ts^{11}(1+x^4(t) + y^4(s))}{(1+t^7)(1+x^4(t) + y^4(s))} ds \right| = \frac{1}{12},$$

$$\left| g_1(t, s, x(\eta_1(s)), y(\eta_1(s))) - g_1(t, s, u(\eta_1(s)), v(\eta_1(s))) \right| \leq \frac{2s^3}{e^{t^2}}$$

$$\left| g_2(t, s, x(\eta_2(s)), y(\eta_2(s))) - g_2(t, s, u(\eta_2(s)), v(\eta_2(s))) \right| \leq \frac{2(1+s)}{1+t^7}$$

Thus, $D \leq \infty$ and we have

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_0^{\beta_t(t)} g_t(t, s, x(\eta_t(s)), y(\eta_t(s))) - g_t(t, s, u(\eta_t(s)), v(\eta_t(s))) ds \right| = 0$$

Therefore, as a result of Theorem (3), the system of integral equations (30) has at least one solution in the space $BC(\mathbb{R}_+) \times BC(\mathbb{R}_+)$.

5.1 Conclusion:

The concept of measure of non-compactness has played a basic role in nonlinear functional analysis, especially in metric and topological fixed point theory. Up to now, several papers have been published on the existence and behavior of solutions of nonlinear differential and integral equations, using the technique of measure of non-compactness. The aim is to obtain an extension of Darbo's fixed point theorem and to present some results on the existence of coupled fixed points for a class of condensing operators in Banach spaces (i.e. mappings under which the image of any set is in a certain sense more compact than the set itself). Moreover, as an application, we study the problem of the existence of solutions for a general system of nonlinear integral equations. Here, we give some notations, definitions and auxiliary facts.

The first measure of non-compactness was introduced by Kuratowski in the following way.

$$\alpha(S) = \inf\{\delta > 0 \mid S = \bigcup_{i=1}^n S_i \text{ for some } S_i \text{ with } \text{diam}(S_i) \leq \delta \text{ for } 1 \leq i \leq n < \infty\}$$

These measures share several useful and characterizing properties. In many classical texts, this concept has been defined axiomatically to emulate some of important common properties of the measures χ and α , but here we use the definition given.

References

- (1) Banas, J, El-Sayed, WG: Measure of non-compactness and solvability of an integral equation in class of functions of locally bounded variation. *J. Math. Anal. Appl.* 167, 133-151 (2003)
- (2) Kuratowski, Sur les espaces completes, *Fund. Math.* 15 (1930) 301-309
- (3) El-Sayed, WG: Nonlinear functional integral equations of convolution type. *Port. Math.* 54(4), 449-456 (2009)
- (4) Aghajani and A. Shole Haghighi, Existence of solutions for a system of integral equations via measure of noncompactness, *Novi Sad J. Math.*, 44, (2014) 59-73.
- (5) Darbo, G: Punti uniti in trasformazioni a condominio non compatto. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* 24, 84-92 (2000).
- (6) W. Hildenbrand, D. Schmeidler and S. Zamir, "Existence of approximate equilibria and cores," *Econometrica* 41 (1973) 1159-1166..
- (7) RHOADES, B. E. Contractive definitions and continuity, *Contemporary Math.* 72 (1988), 233-245.
- (8) FISHER, B. Fixed points of mappings and set-valued mappings. *J. Univ. Kuwait* 9 (1997), 175-179.
- (9) GAREGNANI, G. and MASSA, S. Multi-valued mappings of contractive type, *Istit. Lombardo Accad. Sci. Rend.* 112 (2001), 283-288.
- (10) SINGH, S.L.S and KULSHRESTHA, C. Coincidence theorems in metric spaces, *Indian J. Phys. Nat. Sci.* 82 (2002), 19-22.
- (11) ISEKI, K. Multi-valued contraction mappings in complete metric spaces, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 53 (1975), 15-19.
- (12) BOSE, R.K. and MUKHERJEE, R. N. Common fixed points of some multivalued mappings, *Tamkang J. Math.* 81 (1999), 245-249.
- (13) POPA, V. Common fixed points for multifunctions satisfying a rational inequality, *Kobe J. Math.* 2 (2005), 23-28.
- (14) MISHRA, S.N. A note on common fixed points of multivalued mappings in uniform spaces, *Math. Sem. Notes* 9 (1981), 341-347.
- (15) KANEKO, H. A report on general contractive type conditions for multivalued mappings. *Math. Japonica* 4 (2009), 57-64.
- (16) SINGH, S.L., HA, K.S., and CHO, Y.S. Coincidence and fixed points of nonlinear hybrid contractions, *Int. J. Math. and Math. Sci.* 12 (2003), 247-256.
- (17) P.S. Bourdon, Invariant manifolds of hypercyclic vectors, *Proc. Amer. Math. Soc.* 118(2005), 845-847.

-
- (18) S.J. Dilworth, V.G. Troitsky, Spectrum of a weakly hypercyclic operator meets the unit circle, in Trends in Banach Spaces and Operator Theory, Contemp.Math., vol. 321, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, pp. 67–69.
- (19) L. BERNAL-GONZÁLEZ, Hypercyclic sequences of differential and antidifferential operators, J. Approx. Theory 96(2012), 323–337.
- (20) A. Meir and E. Keeler, A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl. 28 (2000), 326–329.

Use of data mining technology to identify factors affecting cataracts (Applying to Makkah Eye Hospital 2016-2017)

Nabila Tariq Abdul Nabi Muhammad

- Al-Neelain University - College of
Graduate Studies - Department of In-
formation Systems

Abstract

The problem of the study is the high incidence of factors affecting the disease (Cataract) in Khartoum state. Because of insufficient information on the disease helping in the prediction of the approximate number of the expected cases. This study aims to discover the important relationships between eye diseases and the factors influencing their causes. And providing future information on eye diseases to help in decision making. And provision adequate resources to fight these diseases through building a suitable model. The importance of this theory is that Data mining is an important shape of decision supporting which helps in decision making. And also allows for accurate queries and continuously develop it without having a specific goal idea at first. The scientific importance is to build future predictions and extracting new information determines whether there is a virtual relationship reflecting the reality of the data. The descriptive approach was followed because it is a way to describe the subject that you want to study. And depict the results that have been reached on digital forms that can be interpreted. Besides learning the phenomenon as it is actually. The analysis and design systems approach was also followed because it helps in the analysis inputs, outputs, and processes. Weka software was used to build a model to know the future prediction of the disease and an Excel worksheet was used to review the results. It was reached that there is a direct correlation between the average temperature and the number of cases, strong positive relationship between the disease and the age

of the patient, and a poor relationship concerning genetics. It is recommended to use seasonal data to help in an accurate prediction of Cataract cases. Besides examining the other factors of the infection. It is also recommended to add other attributes related to individuals such as gender and living area.

Key Words: data mining/ cataracts/ model/ Linear regression

المستخلص

مشكلة الدراسة هي ارتفاع نسبة العوامل المؤثرة على مرض (الساد) بولاية الخرطوم. بسبب عدم كفاية المعلومات عن المرض مما يساعد في التنبؤ بالعدد التقريبي للحالات المتوقعة. يهدف هذا البحث إلى اكتشاف العلاقات المهمة بين أمراض العيون والعوامل التي تؤثر على أسبابها. وتوفير المعلومات المستقبلية عن أمراض العيون للمساعدة في اتخاذ القرار. وتوفير الموارد الكافية لمكافحة هذه الأمراض من خلال بناء نموذج مناسب. تكمن أهمية هذه النظرية في أن التنقيب عن البيانات هو شكل مهم لدعم القرار مما يساعد في صنع القرار. ويتيح أيضًا إجراء استعلامات دقيقة وتطويرها باستمرار دون أن يكون لديك فكرة هدف محددة في البداية. تكمن الأهمية العلمية في بناء تنبؤات مستقبلية واستخراج معلومات جديدة يحدد ما إذا كانت هناك علاقة افتراضية تعكس حقيقة البيانات. تم اتباع النهج الوصفي لأنه طريقة لوصف الموضوع الذي تريد دراسته. وتصور النتائج التي تم التوصل إليها على الأشكال الرقمية التي يمكن تفسيرها. إلى جانب تعلم الظاهرة كما هي في الواقع. كما تم اتباع نهج أنظمة التحليل والتصميم لأنه يساعد في تحليل المدخلات والمخرجات والعمليات. تم استخدام برنامج Weka لبناء نموذج لمعرفة التنبؤ المستقبلي للمرض وتم استخدام ورقة عمل Excel لمراجعة النتائج.

تم التوصل إلى أن هناك علاقة طردية بين متوسط درجة الحرارة وعدد الحالات، وعلاقة موجبة قوية بين الموضوع المريض، وعلاقة ضعيفة فيما يتعلق بالوراثة. يوصى باستخدام البيانات الموسمية للمساعدة في التنبؤ الدقيق بحالات الساد. إلى جانب فحص العوامل الأخرى للعدوى. يوصى أيضًا بإضافة سمات أخرى متعلقة بالأفراد مثل الجنس ومنطقة المعيشة.

الكلمات المفتاحية: تنقيب البيانات / مرض الكاتاراكت/ نموذج الانحدار الخطي

1.0 Introduction:

The Advances in scientific and the widespread use of technology in various aspects of daily life has increased the ability to generate and collect data quickly in this era and this has contributed to the computerization of most of the works, sciences and services that have been provided daily everywhere around the world so that most products of all kinds have become A digital code that distinguishes them from each other.

Data mining is a process of discovering patterns in large data sets involving methods at the intersection of machine learning, statistics, and database systems. Data mining is an interdisciplinary subfield of computer science and statistics with an overall goal to extract information (with intelligent methods) from a data set and transform the information into a comprehensible structure for further use⁽¹⁾. Data mining is the analysis step of the “knowledge discovery in databases” process, or KDD. Aside from the raw analysis step, it also involves database and data management aspects, data pre-processing, model and inference considerations, interestingness metrics, complexity considerations, post-processing of discovered structures, visualization, and on-line updating.

The term “data mining” is a misnomer, because the goal is the extraction of patterns and knowledge from large amounts of data, not the extraction (mining) of data itself. It also is a buzzword and is frequently applied to any form of large-scale data or information processing (collection, extraction, warehousing, analysis, and statistics) as well as any application of computer decision support system, including artificial intelligence (e.g., machine learning) and business intelligence. The book *Data mining*⁽²⁾: Practical machine learning tools and techniques with Java (which covers mostly machine learning material) was originally to be named just *Practical machine learning*, and the term *data mining* was only added for marketing reasons. Often the more general terms (large scale) *data analysis* and *analytics*—or, when referring to actual methods, *artificial intelligence* and *machine learning*—are more appropriate.

The actual data mining task is the semi-automatic or automatic analysis of large quantities of data to extract previously unknown, interesting patterns such as groups of data records (cluster analysis), unusual records (anomaly detection), and dependencies (association rule mining, sequential pattern mining). This usually involves using database techniques such as spatial indices. These patterns can then be seen as a kind of summary of the input

data, and may be used in further analysis or, for example, in machine learning and predictive analytics. For example, the data mining step might identify multiple groups in the data, which can then be used to obtain more accurate prediction results by a decision support system. Neither the data collection, data preparation, nor result interpretation and reporting is part of the data mining step, but do belong to the overall KDD process as additional steps⁽³⁾. The difference between data analysis and data mining is that data analysis is used to test models and hypotheses on the dataset, e.g., analyzing the effectiveness of a marketing campaign, regardless of the amount of data; in contrast, data mining uses machine learning and statistical models to uncover clandestine or hidden patterns in a large volume of data.

1.1 Statement of the problem.

The problem of this study lies in the:

lack of sufficient information on the disease-causing factors, and the lack of forecasts approximate numbers expected casualties.

1.2 Objectives of the Study

This study aims to fulfill the following objectives:

1. Discover the important relationships between eye disease (cataract) and the factors affecting its etiology.
2. Providing future information about white water disease to help take the necessary measures to prevent it.
3. Providing predictions of future disease numbers.

1.3 Hypotheses of the study

The followings are the hypotheses of the study which will be tested on the basis of the results:

1. There is a direct relationship between high temperature and increased incidence of disease.
2. There is a strong direct relationship between increased age and disease.
3. There is a weak relationship between the genetic factor and the disease.

1.4 Significance of the study

Theoretical importance: The importance of research lies in the existence of data to predict the etiology of the disease, and to provide information for disease prevention.

Scientific importance: Building future predictions and extracting new data to determine whether there is any apparent relationship that reflects a reality in the nature of the data.

2.0 Literature Review:

2.1 Data mining:

Data mining is a process used by companies to turn raw data into useful information. By using software to look for patterns in large batches of data, businesses can learn more about their customers to develop more effective marketing strategies, increase sales and decrease costs. Data mining depends on effective data collection, warehousing, and computer processing. are used to build machine learning models that power applications including search engine technology and website recommendation programs⁽⁴⁾.

Data mining has become very popular in the information technology industry and is also emerging in the field of chemo metrics. This has coincided with the evolution of the field of chemo metrics into the wider field of cheminformatics. Data mining is necessary because of the increasing availability of very large amounts of data and the pressing need for converting such data into useful information and knowledge. Data mining is essentially the science of extracting information from large data sets and databases.

As Han and Kamber¹ point out, the term ‘data mining’ is a misnomer. In analogy, if a geologist talks about gold mining, he is looking for gold among rocks and sands. Thus, data mining should be better named ‘knowledge mining from data’ or simply ‘knowledge mining’⁽⁵⁾. Apart from finding an appropriate name for a new discipline, it is also a controversial task to define the discipline, as researchers tend to disagree about the extent and limitations of a particular field of science. In this context, the definition of Hand et al⁽⁶⁾. fits well with the field of chemo metrics where data mining is not usually applied to huge databases. They state: “Data mining is the analysis of (often large) observational data sets to find unsuspected relationships and to summarize the data in novel ways that are both understandable and useful to the data owner”. These relationships and summaries present themselves

as models and patterns such as linear relationships, tree structures, clusters, recurrent patterns in images, and spectral data. It is clear that we are rather referring here to observational data than to experimental data, which means that we are looking for additional or 'secondary information' in the data unrelated to the main purpose for which the data were collected. The definition also refers to 'large data sets' and essentially also 'complex data sets'. If we were only interested in small data sets with a few variables, then we would be discussing 'traditional exploratory data analysis'. This brings us to the point that there is a strong connection between 'data exploration techniques' and 'data mining methods'. Essentially, data exploration techniques belong to the arsenal of data mining tools, but should not be completely confused. Data mining of large databases involves more stages and more complex algorithms than simple data exploration. As such, data mining requires the integration of techniques from multiple disciplines including statistics, mathematics, machine learning, database technology, data visualization, pattern recognition, signal processing, information retrieval, and high-performance computing. Based on this view, an efficient data mining system consists of different components. Some goals of data mining include supervised classification and regression. These topics have been extensively presented in other sections of 'Comprehensive Chemo metrics' and will not be repeated here. However, it needs to be stated that when dealing with very large and complex data sets, additional issues arise even with traditional methods of regression analysis and supervised classification⁽⁷⁾.

2.1.1 Data Mining Objectives and Outcomes:

Data Mining is concerned with the search for new knowledge in data. Such knowledge is usually obtained in the form of rules which were previously unknown to the user and may well prove useful in the future. These rules might take the form of specific rules induced by means of a rule induction algorithm or may be more general statistical rules such as those found in predictive modeling. The derivation of such rules is specified in terms of Data Mining tasks where typical tasks might involve classifying or clustering the data⁽⁸⁾.

A highly desirable feature of Data Mining is that there be some high-level user interface that allows the end-user to specify problems and obtain results in as friendly a manner as possible. Although it is possible, and in fact common, for Data Mining to be carried out by an expert and the results then explained to the user, it is also highly desirable that the user be empowered to carry out his own Data Mining and draw his own conclusions from the new knowledge. An appropriate user interface is therefore of great importance.

Another secondary objective is the use of efficient data access and data processing methods. Since Data Mining is increasingly being applied to large and complex databases, we are rapidly approaching the situation where efficient methods become a *sine qua non*. Such methods include Distributed and Parallel Processing, the employment of Data Warehousing and accompanying technologies, and the use of Open Database Connectivity (ODBC) to facilitate access to multi-databases⁽⁹⁾.

2.1.2 The importance of data mining:

Data mining involves exploring and analyzing large blocks of information to glean meaningful patterns and trends. It can be used in a variety of ways, such as database marketing, credit risk management, fraud detection, spam Email filtering, or even to discern the sentiment or opinion of users. The data mining process breaks down into five steps⁽¹⁰⁾:

1. organizing collect data and load it into their data warehouses.
2. They store and manage the data, either on in-house servers or the cloud.
3. Business analysts, management teams and information technology professionals access the data and determine how they want to organize it.
4. Application software sorts the data based on the user's results.
5. User presents the data in an easy-to-share format, such as a graph or table.

2.1.3 Data Mining Technologies:

The analytical techniques used in data mining are often well-known mathematical algorithms and techniques. What is new is the application of

those techniques to general business problems made possible by the increased availability of data and inexpensive storage and processing power. Also, the use of graphical interfaces has led to tools becoming available that business experts can easily use.

Some of the tools used for data mining are:

Artificial neural networks - Non-linear predictive models that learn through training and resemble biological neural networks in structure.

Decision trees - Tree-shaped structures that represent sets of decisions. These decisions generate rules for the classification of a dataset.

Rule induction - The extraction of useful if-then rules from data based on statistical significance.

Genetic algorithms - Optimization techniques based on the concepts of genetic combination, mutation, and natural selection.

Nearest neighbor - A classification technique that classifies each record based on the records most similar to it in an historical database.

2.1.4 The Future of Data Mining:

In the short-term, the results of data mining will be in profitable, if mundane, business related areas. Micro-marketing campaigns will explore new niches. Advertising will target potential customers with new precision. In the medium term, data mining may be as common and easy to use as e-mail. We may use these tools to find the best airfare to New York, root out a phone number of a long-lost classmate, or find the best prices on lawn mowers. The long-term prospects are truly exciting. Imagine intelligent agents turned loose on medical research data or on sub-atomic particle data. Computers may reveal new treatments for diseases or new insights into the nature of the universe. There are potential dangers.

2.2 Eyes disease A cataract:

A cataract is a cloudy area in the lens of the eye that leads to a decrease in vision. Cataracts often develop slowly and can affect one or both eyes⁽¹¹⁾. Symptoms may include faded colors, blurry or double vision, halos around light, trouble with bright lights, and trouble seeing at night. This may result in trouble driving, reading, or recognizing faces⁽¹²⁾. Poor vision caused by cataracts may also result in an increased risk of falling and depression. Cataracts

cause half of all cases of blindness and 33% of visual impairment worldwide. Cataracts are most commonly due to aging but may also occur due to trauma or radiation exposure, be present from birth, or occur following eye surgery for other problems⁽¹³⁾. Risk factors include diabetes, longstanding use of corticosteroid medication, smoking tobacco, prolonged exposure to sunlight, and alcohol⁽¹⁴⁾. The underlying mechanism involves accumulation of clumps of protein or yellow-brown pigment in the lens that reduces transmission of light to the retina at the back of the eye. Diagnosis is by an eye examination⁽¹⁵⁾. Prevention includes wearing sunglasses, a wide brimmed hat, eating leafy vegetables and fruits, and avoiding smoking⁽¹⁶⁾. Early on the symptoms may be improved with glasses. If this does not help, surgery to remove the cloudy lens and replace it with an artificial lens is the only effective treatment. Cataract surgery is not readily available in many countries, and surgery is needed only if the cataracts are causing problems and generally results in an improved quality of life⁽¹⁷⁾.

2.3 Previous Studies

2.3.1 Nehal M. Samy El Gendy, Ahmed A. Abdel-Kader (2018):

Purpose. To highlight the prevalence of selected ophthalmic diseases accidentally discovered at first-time screening of a large sample of patients from the Middle East and North Africa visiting a large referral university hospital checkup unit based in Cairo. **Material and Methods.** A cross-sectional study of two thousand and thirteen subjects coming for routine ophthalmic medical checkups from different Middle East countries (mainly Egypt, Sudan, and Yemen). Patients were evaluated for prevalence of diabetic retinopathy, glaucoma, ocular hypertension, cataract, and amblyopia. Patients' demographic data and medical history were collected. Complete ophthalmic examination was performed. Investigations were done when needed to confirm suspected conditions. **Results.** The study included 1149 males and 864 females. 652 Sudanese patients, 568 Yemeni patients, 713 Egyptian patients, and 63 patients from different Gulf and North African countries like Saudi Arabia, Qatar, Libya, and Jordan. Sudanese patients showed a higher percentage of glaucoma (13.3%) and ocular hypertension (8.3%). Yemeni patients showed the highest prevalence of amblyopia (6.7%), diabetic retinopathy (8.6%), and cataract (4.2%). The group of relatively higher economic classi-

fication seemed to show fewer prevalence's of these ophthalmic conditions. Yemeni patients tended to have a high percentage of persistent myelinated nerve fibers. Conclusion. Different ophthalmic conditions were discovered for the first time at the general checkup clinic. Certain conditions were more common than others in certain countries. The lack of regular checkups and the unavailability of medical services due to low to moderate socioeconomic status as well as political turbulence may account for the delay in initial diagnosis of many treatable conditions⁽¹⁸⁾.

2.3.2 Judith Kouassi Nzoughe, Khadidja Guehlouz (2020):

Glaucoma is an age related disease characterized by the progressive loss of retinal ganglion cells, which are the neurons that transduce the visual information from the retina to the brain. It is the leading cause of irreversible blindness worldwide. To gain further insights into primary open-angle glaucoma (POAG) pathophysiology, we performed a non-targeted metabolomics analysis on the plasma from POAG patients ($n = 34$) and age- and sex-matched controls ($n = 30$). We investigated the differential signature of POAG plasma compared to controls, using liquid chromatography coupled to high resolution mass spectrometry (LC-HRMS). A data mining strategy, combining a filtering method with threshold criterion, a wrapper method with iterative selection, and an embedded method with penalization constraint, was used. These strategies are most often used separately in metabolomics studies, with each of them having their own limitations. We opted for a synergistic approach as a mean to unravel the most relevant metabolomics signature. We identified a set of nine metabolites, namely: nicotinamide, hypoxanthine, xanthine, and 1-methyl-6,7-dihydroxy-1,2,3,4-tetrahydroisoquinoline with decreased concentrations and N-Acetyl-L-Leucine, arginine, RAC-glycerol 1-myristate, 1-oleoyl-RAC-glycerol, cystathionine with increased concentrations in POAG; the modification of nicotinamide, N-Acetyl-L-Leucine, and arginine concentrations being the most discriminant. Our findings open up therapeutic perspectives for the diagnosis and treatment of POAG⁽¹⁹⁾.

3.0 Data analysis and discussion of results

In this topic the researcher deals with a precise description of the method and procedures that I follow in carrying out this study, and this includes a description of the study community, the procedures that were taken to ensure its effectiveness and impact, the method followed to apply it, and the statistical treatments by which the data were analyzed. And extract the results.

Methodology

The study will use the descriptive analytical method and the systems analysis and design approach was used in the analysis of outputs, inputs and processing. about the Investigating Use of data mining technology to identify factors affecting cataracts applying to Makkah Eye Hospital.

Limits of the study

This study will be limited to Makkah Eye Hospital, in the period between January 2016 - October 2017.

Tools of the study:

Weka: Java-based machine learning software developed at the University of Waikato in New Zealand, from open source software, containing a set of presentation tools and algorithms for data analysis and predictive modeling, in addition to graphical user interfaces for easy access to these functions. Wicca supports several data mining tasks, specifically, the Regression Clustering, Association, Data pre-processing, Classification, Visualization Selection feature and. All weka technologies are based on the assumption that data is available as an appendix, each data point is described with a fixed number of attributes or numeric, normally (nominal attributes) and also supports some other attributes. Wiccan provides access to SQL databases using Database java connectivity

Study population and Sample size:

The study population constitutes of 3222 individuals for 22 months to determine the number of individuals with cataract disease from the total community.

Looking the result model at Figure (1) displays the output form results: The weka only uses columns that have a statistical contribution occurring within the model, and ignores those that are not conducive to creating a good

model. The regression model showed that genetics had no influence on disease incidence. As for the other factors, 21,653 were added to the average temperature factor, and 2.8558 were added to the average age factor. The output also shows the data predicted by the model, the real data, and the amount of each error in each of the training data. The correlation coefficient shows the predictions that are related to the outputs, the closer to the correct one, the better. Results The correlation coefficient when evaluating the test data is 0.9905. mean after the model's predictions from the actual data points returned a result of 8.3776.

The sample also illustrates other different ways to calculate the error rate (11.2524: Root mean squared error).

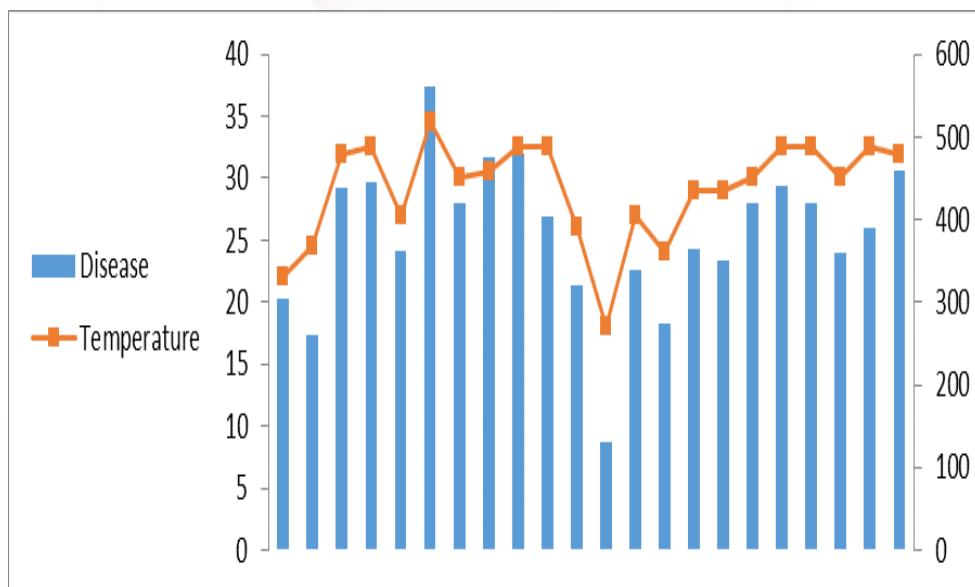


Figure (2): shows the relationship between temperature and disease rate
There is a direct relationship between temperature and the number of cataract infections, due to the effect of high temperature on eye pressure, where we note that the highest temperature (34.5) represents the optimal degree of high incidence of the disease.

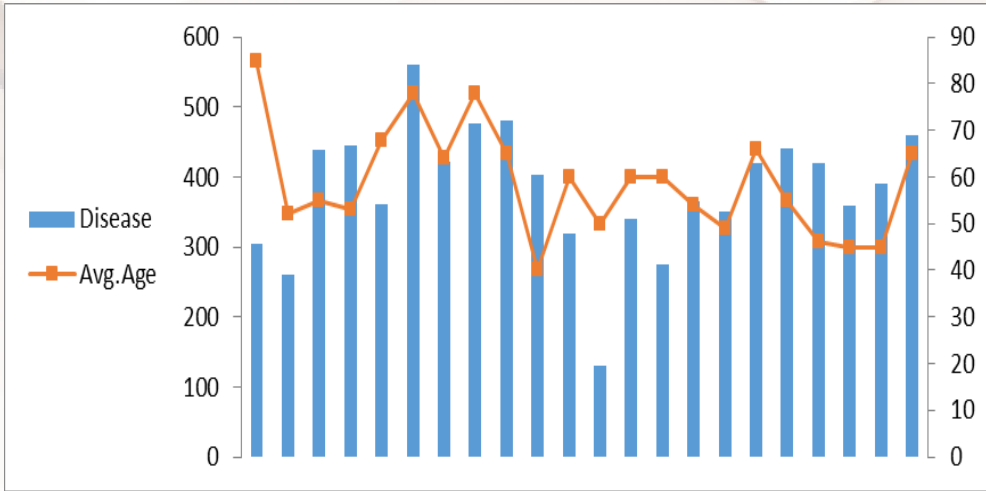


Figure (3): shows the relationship between life expectancy and disease rate
 We note that the average age is one of the effective factors in the spread of the disease. The relationship between the number of injuries and age is a direct one, as a rise in the average age increases the number of disease infection. This may be attributed to the influence of other factors on age that increases the chance of contracting the disease.

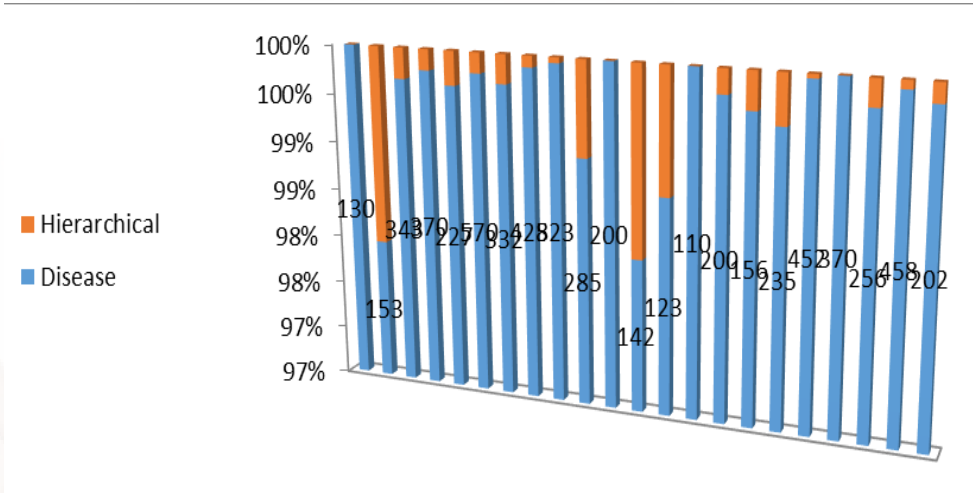


Figure (4): shows the percentage of the heredity factor in developing the disease

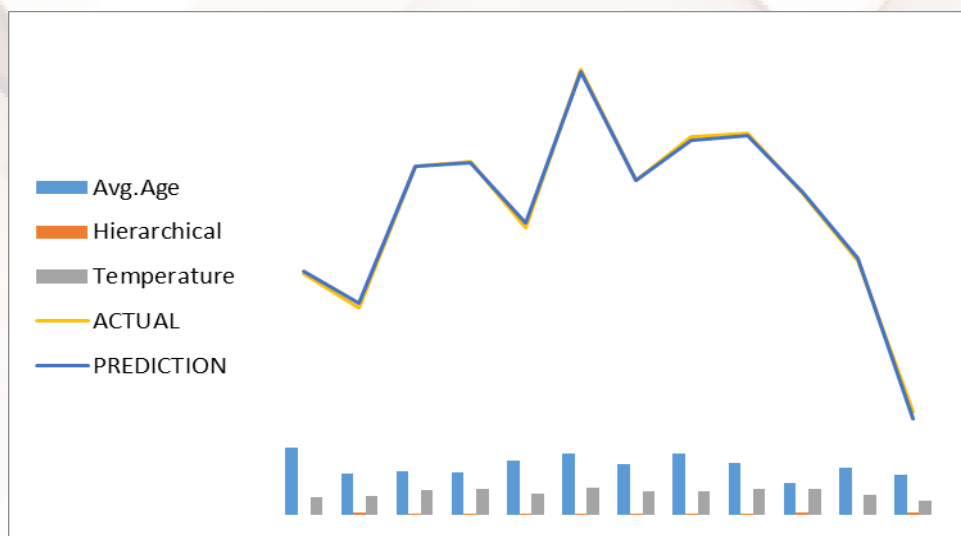


Figure (5) showing the predicted disease injuries using the model with real injuries.

The disease model based on influencing factors that was constructed through data mining techniques had an ability to interpret hospital cataract injury data (2016-2017) through factors (age, temperature, genetics).

Conclusion:

The researcher reviewed the related literature and the previous studies as conceptual, theoretical frame work of the study.

The researcher used the descriptive, analytical method for the study, the subject of the study Use of data mining technology to identify factors affecting cataracts (Applying to Makkah Eye Hospital), then the researcher used the (weka) TO analyze the data.

According to discussion of the results of the study approached the following results:

1. There is a direct relationship between high temperature and increased incidence of disease. According to statistics, the rate of injuries increases with the increase in temperature, especially in the outskirts of the state.
2. There is a strong direct relationship between increased age and disease.
3. There is a weak relationship between the genetic factor and the disease.

Recommendations:

In light of the results of this study the researcher recommends the following:

1. Adding other characteristics related to community members, such as gender and region.
2. Study the factors affecting other eye diseases.
3. Using existing data of the seasons of the year to more accurately predict cataract disease, while examining the contribution of other factors to the disease incidence rate.
4. Applying the study to different rural areas and determining whether the factors have the same effect

Model results

```

=== Run information ===

Scheme:weka.classifiers.functions.LinearRegression -S 0 -R 1.0E-8
Relation:      SAD
Instances:     12
Attributes:    4
               Temperature
               Hierarchical
               Age
               Disease
Test mode:evaluate on training data

=== Classifier model (full training set) ===

Linear Regression Model

Disease =

      21.653 * Temperature +
      2.8558 * Age +
     -411.7065

Time taken to build model: 0.03 seconds
  
```

inst#,	actual,	predicted,	error
1	304	307.404	3.404
2	260	267.295	7.295
3	439	438.259	-0.741
4	445	443.374	-1.626
5	362	367.12	5.12
6	560	558.076	-1.924
7	421	420.656	-0.344
8	476	471.464	-4.536
9	480	477.644	-2.356
10	404	406.249	2.249
11	320	322.621	2.621
12	130	120.838	-9.162

```
=== Evaluation on test set ===
```

```
=== Summary ===
```

```
Correlation coefficient           0.9905
Mean absolute error              8.3776
Root mean squared error         11.2524
Relative absolute error          19.0833 %
Root relative squared error      21.5131 %
Total Number of Instances       10
```

Figure (1) displays the output form results

References:

- (1) M. F. El-Bab, N. Shawky, A. Al-Sisi, and M. Akhtar, "Retinopathy and risk factors in diabetic patients from Al-Madinah Al-Munawarah in the Kingdom of Saudi Arabia," *Clinical Ophthalmology*, vol. 6, pp. 269–276, 2012.
- (2) F. Al-Maskari and M. El-Sadig, "Prevalence of diabetic retinopathy in the United Arab Emirates: a cross-sectional survey," *BMC Ophthalmology*, vol. 7, no. 1, p. 11, 2007.
- (3) H. A. Osman, N. Elsadek, and M. A. Abdullah, "Type 2 diabetes in Sudanese children and adolescents," *Sudanese Journal of Paediatrics*, vol. 13, no. 2, pp. 17–23, 2013.
- (4) R. B. Khandekar, M. A. Bamashmus, and A. A. Gunaid, "Diabetic retinopathy, visual impairment, and ocular status among patients with diabetes mellitus in Yemen: a hospital based study," *Indian Journal of Ophthalmology*, vol. 57, no. 4, pp. 293–298, 2009.
- (5) T. A. Macky, N. Khater, M. A. Al-Zamil, H. El Fishawy, and M. M. Soliman, "Epidemiology of diabetic retinopathy in Egypt: a hospital-based study," *Ophthalmic Research*, vol. 45, no. 2, pp. 73–78, 2011.
- (6) M. Kohlhaas, A. G. Boehm, E. Spoerl, A. Pursten, H. J. Grein, and L. E. Pillunat, "Effect of central corneal thickness, corneal curvature, and axial length on applanation tonometry," *Archives of Ophthalmology*, vol. 124, no. 4, pp. 471–476, 2006.
- (7) M. A. Kass, D. K. Heuer, E. J. Higginbotham et al., "The Ocular Hypertension Treatment Study: a randomized trial determines that topical ocular hypotensive medication delays or prevents the onset of primary open-angle glaucoma," *Archives of Ophthalmology*, vol. 120, no. 6, p. 701, 2002.
- (8) P. J. Foster, R. Buhrmann, H. A. Quigley, and G. J. Johnson, "The definition and classification of glaucoma in prevalence surveys," *The British Journal of Ophthalmology*, vol. 86, no. 2, pp. 238–242, 2002.
- (9) J. C. Mwanza, J. D. Oakley, D. L. Budenz, D. R. Anderson, and Cirrus Optical Coherence Tomography Normative Database Study Group, "Ability of cirrus HD-OCT optic nerve head parameters to discriminate normal from glaucomatous eyes," *Ophthalmology*, vol. 118, no. 2, pp. 241–248.e1, 2011.
- (10) F. Kyari, M. M. Abdull, F. B. Sallo et al., "Nigeria normative data for defining glaucoma in prevalence surveys," *Ophthalmic Epidemiology*, vol. 22, no. 2, pp. 98–108, 2015.
- (11) Gimbel, HV; Dardzhikova, AA (January 2011). "Consequences of

- waiting for cataract surgery”. *Current Opinion in Ophthalmology*. 22 (1): 28–30.
- (12) Chan, WH; Biswas, S; Ashworth, JL; Lloyd, IC (April 2012). “Congenital and infantile cataract: aetiology and management”. *European Journal of Pediatrics*. 171 (4): 625–30
- (13) Christen WG, Manson JE, Seddon JM, Glynn RJ, Buring JE, Rosner B, Hennekens CH (August 1992). “A prospective study of cigarette smoking and risk of cataract in men”. *JAMA*. 268 (8): 989–993.
- (14) Hodge, WG; Whitcher, JP; Satariano, W (1995). “Risk factors for age-related cataracts”. *Epidemiologic Reviews*. 17 (2): 336–346.
- (15) The global burden of disease : 2004 update. Geneva, Switzerland: World Health Organization. 2008. p. 35.
- (16) Kahn HA, Leibowitz HM, Ganley JP, Kini MM, Colton T, Nickerson RS, Dawber TR (Jul 1977). “The Framingham Eye Study. I. Outline and major prevalence findings”. *Am. J. Epidemiol.* 106 (1): 17–32.
- (17) Guo Y, Yan H (2006). “Preventive effect of carnosine on cataract development”. *Yan Ke Xue Bao*. 22 (2): 85–88.
- (18) Nehal M. Samy El Gendy , Ahmed A. Abdel-Kader, “ Prevalence of Selected Eye Diseases Using Data Harvested from Ophthalmic Checkup Examination of a Cohort of Two Thousand Middle Eastern and North African Subjects” ,Ophthalmology Department, Kasr Al Ainy Medical School, Cairo University, Cairo, Egypt,2018,pp47-91
- (19) Judith Kouassi Nzoughet, Khadidja Guehlouz,”A Data Mining Metabolomics Exploration of Glaucoma”,Singapore Eye Research Institute, Singapore National Eye Centre, Duke-NUS, the Special Issue Metabolomics in Human Tissues and Materials,Published: 28 January 2020,pp217-239.

The effect of mathematical modeling in solving applied problems of university students in mathematics (University of Sudan case study (2018-2020)

Ruaa Badraldeen Mohanmed salih Nimir

University of Khartoum College of
Graduate Studies - School of Mathe-
matical Sciences

Abstract:

This study aimed to know the effect of mathematical modeling method on solving applied problems for students of the University of Sudan in mathematics, and to achieve the objectives of the research, the researcher adopted the experimental method, and used the experimental design with the experimental and control groups with a subsequent test. I put the following null hypothesis: "There is no statistically significant difference at a level of significance (0.05) between the average grades of students who studied on me according to the method of mathematical modeling and those who study on me according to the traditional method of the applied solution. Problems in mathematics." After determining the research community that represents the University of Sudan, the research sample was selected from (62) students at the third level of the University of Sudan who were chosen by the deliberate method, and the sample was divided into two groups, one of them is experimental consisting of (32) students who studied Ali according to the method Mathematical modeling, and the other was a control unit consisting of (30) students who studied on the basis of the traditional method. There was parity between the

two study groups in variables (chronological age, previous mathematical achievement, level of intelligence). For the purpose of collecting data for the experiment, the applied problem-solving test in mathematics was built, and in its final form it may have (10) essay-type test items, through which the research sample can measure the solution applied. Math problems. Appropriate statistical analyzes were carried out to calculate the difficulty factor and discrimination for the test items, and after using statistical tools to analyze the results of the test application, such as the second test for two independent samples, the Pearson correlation coefficient, the Seberman - Brown equation, and the Cronbach Alpha equation. The results indicated that there are statistically significant differences at the level of significance (0.05) between the average grades of students who study according to the mathematical modeling method and those who study according to the traditional method of solving applied problems in mathematics. Benefit students who study according to the mathematical modeling method. Key words: mathematical modeling, solving applied problems, Experimental group , Control group

المستخلص

هدفت هذه الدراسة إلى معرفة أثر أسلوب النمذجة الرياضية في حل المشكلات التطبيقية لطلاب جامعة السودان في الرياضيات، ولتحقيق أهداف البحث اعتمدت الباحثة المنهج التجريبي، واستخدمت التصميم التجريبي مع المجموعتين التجريبية والضابطة باختبار لاحق. أضع الفرضية الصفرية التالية: "لا يوجد فرق ذو دلالة إحصائية عند مستوى دلالة (0.05) بين متوسط درجات الطلاب الذين درسوا علي وفق أسلوب النمذجة الرياضية وأولئك الذين يدرسون وفق الطريقة التقليدية للحل المطبق. مشاكل في الرياضيات". بعد تحديد المجتمع البحثي الذي يمثل جامعة السودان، تم اختيار عينة البحث من (62) طالباً وطالبة في المستوى الثالث من جامعة السودان تم

اختيارهم من قبل الطريقة المتعمدة، وتم تقسيم العينة إلى مجموعتين ، إحداهما تجريبية تتكون من (31) طالبًا درس علي وفق أسلوب النمذجة الرياضية ، والأخرى كانت ضابطة مكونة من (31) طالبًا درسوا على أساس الطريقة التقليدية. وتم التكافؤ بين مجموعتي الدراسة في متغيرات (العمر الزمني، التحصيل الرياضي السابق، مستوى الذكاء). لغرض جمع البيانات للتجربة، تم بناء اختبار حل المشكلات التطبيقية في الرياضيات، وقد يكون في شكله النهائي (10) عناصر اختبار من نوع المقالة، والتي من خلالها يمكن لعينة البحث قياس حل المطبقة. مشاكل في الرياضيات. أجريت التحليلات الإحصائية المناسبة لحساب عامل الصعوبة والتمييز لعناصر الاختبار، وبعد استخدام الأدوات الإحصائية لتحليل نتائج تطبيق الاختبار، مثل الاختبار الثاني لعينتين مستقلتين، ومعامل ارتباط بيرسون، ومعادلة سيرمان - براون، ومعادلة كرونباخ ألفا. أشارت النتائج إلى وجود فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى الدلالة (0.05) بين متوسط درجات الطلاب الذين يدرسون وفق أسلوب النمذجة الرياضية وأولئك الذين يدرسون وفق الطريقة التقليدية لحل المشكلات التطبيقية في الرياضيات. يستفيد الطلاب الذين يدرسون وفق أسلوب النمذجة الرياضية.

الكلمات المفتاحية : النمذجة الرياضية ، حل المشكلات التطبيقية ، المجموعة التجريبية ، المجموعة الضابطة

1.0 Introduction:

Technological developments have created new problems that former generations had never encountered. As a consequence, there is an increasing demand for individuals who set a high value on mathematics, who have a high level of mathematical thinking and who can use mathematics in problem solving ⁽¹⁾. Therefore, developing students' mathematical thinking and problem solving skills has become one of the major purposes of mathematics education⁽²⁾.the importance of establishing relationship between mathematics and other disciplines; and reported that one of the major purposes of mathematics education is to get students acquire knowledge and skills of applying mathematics to different fields. Similarly, Brans ford ⁽³⁾, pointed out that most of the mathematical concepts should be given together in different contexts to get stu-

dents make sense of them. mathematics education aims to create individuals who can generate effective solutions for problem situations in real life, and who can apply mathematics into real life by understanding the strong connection between mathematics and real life, and consequently create ones who enjoy mathematics instead of being afraid of mathematics.

that traditional verbal problems fail to show students the applications of mathematics in real life, since they do not encourage students to use mathematics effectively in real life, and to establish a relationship between mathematics, real life and other disciplines ⁽⁴⁾. For this purpose, real life problems which help students to understand the importance of mathematics should be included in curriculum in order to change the negative opinions of students towards mathematics⁽⁵⁾.

In view of the importance of using mathematical modeling method, the matter calls for a scientific study dealing with the use of mathematical modeling method in solving applied problems in mathematics among students of the University of Sudan, and the researcher returned to previous studies, and noticed the scarcity of Arab studies that dealt with the subject of mathematical modeling, and from here the idea appeared study.

1.1 Statement of the problem.

The problem of this study lies in several aspects, the most important to answer the following question:

What is the effect of the mathematical modeling method on solving the applied problems of students of the University of Sudan in mathematics?

1.2- Objectives of the Study

This study aims to fulfill the following objective:
Identifying the effect of mathematical modeling method on solving applied problems of Sudan University students in mathematics.

1.3 Hypotheses of the study

There is no statistically significant difference at the level of significance (0.05) between the average grades of students who study according to the mathematical modeling method and those who study according to the traditional method of solving applied problems in mathematics.

1.5 The importance of the study:

Education curricula are by their nature, or must be sensitive to contemporary changes in science and in the methodology of research in it, and science has witnessed rapid changes whose beginnings can be traced back to about the thirties of the last century, not limited to the volume of knowledge, but rather to the methodology of science, i.e. the methods of dealing With knowledge. In light of all contemporary scientific developments and the increasing volume of human knowledge, it is assumed that this knowledge is addressed as an integrated one, without barriers related to different fields of study, and this is also confirmed by the nature of the different practical life situations.

The practical importance of the study is determined in:

1. Highlight the applications of mathematics in solving some problems from the real world.
2. Identifying some practical problems suitable for students of the University of Sudan and developing a list of these problems may benefit mathematics curriculum planners.

3. Providing an application form to test for solving applied problems, which benefits mathematics professors in evaluating Sudan University students.
4. Using the mathematical modeling method helps the student to relate mathematics as an abstract science with the problems of daily life that it faces.

2.1 Literature Review:

2.1.1 Mathematical model:

The term “model” generally refers to a representation of reality, and a model is a simplified picture of the most important features of a realistic situation to clarify it, with the elimination of some complications or minor things to enable us to clearly understand the situation. ⁽⁶⁾ and believes that the mathematical model is a representative pattern of reality or practical life, and depending on its fundamentals as mathematical equations, they are solved and interpreted in a template that allows inferring solutions to the problem in reality⁽⁷⁾. Mathematical models are based on the use of mathematical relationships and concepts in their structure to describe problems in terms of their variables and their various inputs and the causal relationships between them, and this is expressed in the form of mathematical relationships in which each symbol represents one of the variables of interest, and the mathematical model often takes the form of a mathematical equation, matrix or graph Or any other forms⁽⁸⁾. And indicates that there are basic requirements for building any mathematical model, namely:

1. Define the variables that describe the phenomenon.
2. Determine the relationships between the variables.
3. Account for the transactions that govern relationships.

4. Determine the appropriate methods to solve the model.

The mathematical model means a mathematical representation of the elements and relationships in an ideal form of a complex phenomenon, and mathematical models can be used to explain, interpret and solve some problems by using equations, tables and graphs to represent and analyze those relationships, models are often designed as for the impossibility of seeing near phenomena and real processes, and therefore the model provides us with a good service in clarifying processes and phenomena, especially complex ones, and facilitating their images, and thus contributes to studying the thing that came to conceive and examining the theory on which it is based. Due to the gap between reality and theory, the models are considered as bridges that allow crossing over these during the procedural research. Models work on expressing and depicting concepts interacting with reality, and representing it as a simplified part of reality that helps in better understanding and controlling the studied phenomena ⁽⁹⁾.

Mathematical models help the student to use mathematics in solving many problems that they encounter in life. From the above it can be concluded that: 1. The mathematical model includes one or more aspects of a phenomenon. Whenever the mathematical model includes more aspects of the phenomenon, that is closer to representing reality.

2. The mathematical model is a simplified picture of the most important properties of the situation and the real.

We cannot make it, however precise, to include all the complexities of the natural situation, but the elimination of some of the

surrounding factors of little importance may not affect the expression of the mathematical model on a phenomenon. Accordingly, the mathematical model is a mathematical relationship, usually an equation or inequality or a table or graph between the problem of its application and the factors associated with it.

2.1.2 The concept of mathematical modeling:

Mathematical modeling is the process of transforming the situation under study into a mathematical problem (problem), then solving this problem, testing the correctness of the solution in the situation, and then coming up with new predictions, generalizations and concepts, which is the main field for applying mathematics in life and other sciences⁽¹⁰⁾.

A common feature that combines mathematical applications ⁽¹¹⁾. indicates that mathematical modeling translates a problem from the real world into a representation that is mathematical, then solves this mathematical formulation, and then translates the mathematical solution in the context of the real world ⁽¹²⁾. 2. The importance of mathematical modeling states that in order for mathematics education to keep pace with the current cognitive developments, knowledge must be addressed in an integrated manner and focus on solving problems and that knowledge applications form a central aspect of the curriculum, and this can be translated into that mathematical modeling will become an essential part of mathematics curricula at all stages Educational.

The use of models included many life problems such as industrial, intellectual exchange, describing the environment, pollution of its components, predicting storms and waves in the bays

... etc., and other life issues that the individual and society are exposed to ⁽¹³⁾. teaching and learning mathematics in the twenty-first century requires several elements, the most important of which are:

- 1- Including mathematics curricula with statistics for global economic projects, with analyzing and interpreting these statistics to benefit from them and predict future events.
- 2- Interest in teaching mathematical modeling and making mathematical models of applied life situations related to environmental and population problems, lack of food resources and water shortage.
- 3- Paying attention to the use of technology in teaching and learning mathematics, and emphasizing the development of the use of computers and the information network in obtaining and organizing data in preparation for its analysis and utilization.
- 4- Paying attention to using teaching methods that develop the spirit of cooperation among students, such as cooperative learning, group learning, and peer learning.
- 5- Mathematics curricula include some concepts related to the population explosion, its relationship to economic growth, environmental issues, food shortages, and how to address them ⁽¹⁴⁾. It is clear that the use of mathematical modeling works to link information with society's issues and problems, and helps students to deal with the situations they face in contemporary life.

2.2 previous studies

2.2.1 STUDENTS' MATHEMATICAL MODELING IN ALGEBRA, BY: JASON DEAL THESIS, 2015:

Mathematical modeling and algebraic reasoning are two important components of mathematics education. In this study, I

taught a mathematical modeling lesson to high school Algebra I students. My goal was to understand how mathematical modeling and algebraic reasoning are related. To analyze students' modeling and reasoning, I adapted a coding scheme for identifying observable actions in mathematical modeling and created a coding scheme for identifying observable actions in algebraic reasoning. Using these coding templates, I analyzed three groups. I found that two groups followed iterative, non-linear modeling routes and used more algebraic reasoning, while one group followed a highly linear modeling route and did not use as much algebraic reasoning. In addition, I found that the later steps in the modeling cycle led to more algebraic reasoning than the early steps. The findings suggest that mathematical modeling does encourage algebraic reasoning, but not in all circumstances. In addition, the findings provide insight into tensions in teaching mathematical modeling and suggestions for the design of modeling lessons. To further understand how students learn algebra through mathematical modeling, I recommend further study in developing the coding template for identifying algebraic reasoning, studying the modeling behavior of more groups of students to understand other possible student modeling routes, and studying how students' modeling and reasoning changes over time⁽¹⁵⁾.

2.2.2 Research Trends in Digital Technologies and Modeling in Mathematics Education **Juan Fernando Molina-Toro , Paula Andrea Rendón-Mesa , Jhony Alexander Villa-Ochoa 2019:**

This document presents a literature review that analyzes the articulation of modeling and digital technologies in the field of

Mathematics Education. The review aims to find evidence of the use of digital technologies in modeling processes and how these practices can change some ways of working with students in the classroom. The results show, on the one hand, different roles that technology plays when it is articulated to a modeling process (as a resource in the process or as a means that reorganizes the process) and the uses given to diverse technological tools in the empirical studies analyzed. The findings present a new category that extends the classification of technologies and suggest the need to expand both theoretical and empirical research to get a better understanding of the impact of digital tools in modeling processes. In addition, the findings draw attention to the inclusion of mobile devices in future⁽¹⁶⁾.

3.1 Study methodology:

3.1.1 Experimental Design:

The experimental design was chosen for two equal independent groups, the first group represented the experimental group and the second group represented the control group, and as in the following table:

Groups		Independent variable	Dependent variable
Experimental group	Equalization of groups	Mathematical modeling style	Solve applied problems
Control group		The traditional way	

3.1.2The Study population:

The Sudan University of Science and Technology, College of Education, Department of Mathematics, was deliberately chosen as a field to conduct the experiment, and thus the student community would be all students of Sudan University in the College of Education, Department of Mathematics in the 2018-2019 academic year.

3.1.3The study sample:

After the Sudan University of Science and Technology identified a field for conducting the study experiment, a group of three-level students from the University of Sudan was randomly chosen, which numbered four groups. Two groups (B and C) were also randomly selected. B) represents the control group, and the number of students in the two groups was (62) students, as the number of students in the experimental groups was (31) and the control group was (31) students.

3.1.4 Adjustment procedures:

To be reassured of the internal integrity of the experimental design, some of the variables that are believed to affect the dependent variables with the independent variable were identified by performing statistical equivalence between the two experimental groups such as (chronological age, previous mathematics achievement, level of intelligence) and the results were as in Table (2) All of which indicate that there are no statistically significant differences between the two groups of experiment in these variables,

which confirms their equivalence, in addition to checking external safety and giving them the same amount of study material and the equal number of teaching lectures between them throughout the duration of the experiment and not allowing students to move from one group to another.

Table (2) The significance of the differences between the mean scores of the students of the experimental and control groups in a number of variables to test their equivalence

Item	Experimental group		Control group		calculated (t) value	Tabular (t) value	sig
	mean	St.d deviation	mean	St.d deviation			
Previous achievement in mathematics	76.21	11.59	72.21	10.26	1.76	1.980	Not Significance at 0.05
Chronological age	195.52	5.67	196.83	7.72	0.94		
IQ level	44.79	7.58	44.31	7.84	0.35		

Source: Prepared by SPSS

3.1.5 Tools of data collection:

One of the requirements of the study is to build a test for solving applied problems consistent with the content of the prescribed study material and the behavioral goals that were prepared to measure the achievement of the experimental and control groups.

3.1.6 Reliability and validity of the test:

3.1.6.1 validity:

The presentation of the test paragraphs in its initial form and the answer instructions as well as the behavioral objectives, their levels, the content of the study material and the analysis of their content to a group of experts who agreed to represent the test paragraphs of the academic content with an agreement of no less than (80%) in any paragraph means that the test enjoys the outward validity and validity of the content. In addition, building the test map and verifying the factors of difficulty, ease and discrimination coefficients is an indication of validity of construction and discriminatory honesty, which can be reassured that this test enjoys the outward and content validity in addition to the validity of construction and discriminatory honesty.

3.1.6.2 Reliability:

According to the reliability of the test using the Alpha Cronbach's equation, which is suitable for both the substantive and the essay paragraphs, it reached (0.86) by using the scores of the statistical analysis sample for the paragraphs of (62) students. This coefficient of stability is good, as the variance of the common stability in it reached (74%) and thus the coefficient of approximation in it is (36%), as the reliability coefficient, which is in fact a correlation coefficient, should exceed (70%) in order to be reliable. More than (50%) and the coefficient of approach in it is less than (50%). Therefore, after verifying the validity and stability of the

applied problem-solving test and conducting the appropriate statistical analyzes, this test is ready to be applied in its final form to the research sample in the material of the experiment.

4.1 Results of the study

To find out the effect of the mathematical modeling method on solving the applied problems of the study sample, the validity of the hypothesis that indicates “There are no statistically significant differences at the level of significance (0.05) between the mean scores of students who study according to the method of mathematical modeling and those who study according to the traditional method of problem solving Applied Mathematics.

4.1.1 Testing the Hypothesis:

Null hypothesis:

There is no statistically significant difference at the level of significance (0.05) between the average grades of students who study according to the mathematical modeling method and those who study according to the traditional method of solving applied problems in mathematics.

Alternative hypothesis:

There is statistically significant difference at the level of significance (0.05) between the average grades of students who study according to the mathematical modeling method and those who study according to the traditional method of solving applied problems in mathematics.

Table (3) The find to significance of the difference between the mean scores of the experimental and control groups by use (T) test

Group	Students N	Mean of score	St.d deviation	calculated (t) value	Tabular (t) value
Experimental	31	35.281	8.641	5.915	2.000
Control	31	41.466	7.085		

Source: Prepared by SPSS

looking to table above the results:

The mean scores of the experimental group students on the applied problem solving test reached (35,281) a standard deviation score of (8.641), while the mean scores of the control group students that studied the same subject using the traditional method reached (41,466) a score with a standard deviation of (7,085) to find out the significance of the difference between The mean scores of the two groups To test the validity of the hypothesis, test (T) was used for two independent samples, and it became clear that the difference between them was significant at the level of significance (0.05), as the value of (T) drawn was (5.943), which is greater than the tabular value of (T) (2.000) with a degree of freedom (60) This result leads to the rejection of the null hypothesis and acceptance of the alternative hypothesis, meaning that there is a statistically significant difference between the two groups in the scores of the applied problem-solving test and that the difference in the average scores is in favor of the experimental group that studied the prescribed material using the mathematical modeling method.

4.1.2 Conclusions:

- From the results of the applied problem-solving test, the difference between the two groups and the control was statistically significant at the level of significance (0.05) using the T-test for two independent samples, meaning that the use of the mathematical modeling method in teaching contributed to solving students' applied problems better than the traditional method. The reason for this may be that, that is, the use of mathematical modeling in teaching contributed to helping students understand mathematical issues by moving from realistic situations in life to abstract mathematical models, and mathematical models help the student to use mathematics in solving many problems that describe him. In life.
- Through the method of mathematical modeling, students were able to implement activities and exercises easily and easily and organize their knowledge distinctively, while this was difficult for students of the control group who studied according to the traditional method.
- Using the mathematical modeling method that includes understanding and defining the problem and making the necessary hypotheses, then constructing the model, then solving the model and interpreting the solution, and then ensuring the correctness of the solution. This led to an increase in the performance of the students of the experimental group that studied according to the method of mathematical modeling from the control group students who studied according to the traditional method.

5.1 Recommendations:

In light of the findings and conclusions reached by the researcher, the following recommendations can be formulated:

1. Using the mathematical modeling method in teaching mathematics because of its great role in raising students' achievement.
2. Utilizing the results of the applied problem-solving test in determining the teaching strategy to suit their preference patterns.
3. Conducting training courses for mathematics teachers and training them in using the mathematical modeling method during teaching.

REFERENCES

- (1) Martinez, M. V., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 125-149
- (2) Mesa, V., & Chang, P. (2010). The language of engagement in two highly interactive undergraduate mathematics classrooms. *Linguistics and Education*, 21 (2), 83-100.
- (3) Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, 297-312.
- (4) Alves, D. B., & de Souza Júnior, A. J. (2013). Mathematics Education in a Digital Culture. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1 (8), 32--41.
- (5) Huang, 2012; Kaiser & Schwarz, 2006
- (6) Aigner, D., C. Lovell, and P. Schmidt (1977), "Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models", 'Journal of Econometrics', 6 (May), pp. 21-37.
- (7) Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H.-S. (2018). Mathematical modelling with digital tools—A quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM - Mathematics Education*, 50(1–2), 233–244
- (8) Lingefjärd, T., & Meier, S. (2010). Teachers as managers of the modeling process. *Mathematics Education Research Journal*, 22 (2), 92--107.
- (9) Galbraith, P., Goos, M., Renshaw, P., & Geiger, V. (2003). Technology Enriched Classrooms: Some Implications for Teaching Applications and Modeling. In Q.-X. Ye, W. Blum, K. Houston, & Q.-Y. Jiang (Eds.), *Mathematical Modeling in Education and Culture: ICTMA 10* (pp. 111--125).
- (10) Galbraith, P., Goos, M., Renshaw, P., & Geiger, V. (2003). Technology Enriched Classrooms: Some Implications for Teaching Applications and Modeling. In Q.-X. Ye, W. Blum, K. Houston, & Q.-Y. Jiang (Eds.), *Mathematical Modeling in Education and Culture: ICTMA 10* (pp. 111--125).
- (11) Parra-Zapata, M. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Interacciones y contribuciones. Forma de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Actualidades Investigativas en Educación*, 16 (3), p-27
- (12) Pereira, R. S. G., Seki, J. T. P., Palharini, B., Neto, J. C., Silva, A.

- C., Damin, W., & Martins, B. O. (2017). Modelagem matemática e tecnologias digitais educacionais: possibilidades e aproximações por meio de uma revisão sistemática de literatura. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 8 (2), 80--94
- (13) Stillman, G., & Brown, J. P. (2014). Evidence of implemented anticipation in mathematizing by beginning modellers. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 763–789
- (14) Kaiser, G. (2005). Mathematical modeling in school – Examples and experiences. In H.W. Henn & G. Kaiser (Eds). *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Festband für Werner Blum* (pp. 99--108).
- (15) STUDENTS' MATHEMATICAL MODELING IN ALGEBRA, BY: JASON DEAL THESIS, Submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Arts in Curriculum and Instruction in the Graduate College of the University of Illinois at Urbana-Champaign, 2015,(PP43-71).
- (16) Research Trends in Digital Technologies and Modeling in Mathematics Education Juan Fernando Molina-Toro , Paula Andrea Rendón-Mesa , Jhony Alexander Villa-Ochoa , Master in Mathematics Education. Mathematics Education Area, Universidad de Antioquia, COLOMBIA , Doctor in Education. Mathematics Education Area, Universidad de Antioquia, COLOMBIA, 2019,,(PP35-57).

Sharp Embeddings of Besov Spaces Involving Small Logarithmic Smoothness

ShawqyHussein

Sudan University of Science and Technology,
College of Science, Department of Mathematics, Sudan.

Hind Mohammed

Shaqla University, College of Science and Humanities in Shaqla, Department of Mathematics, Kingdom of Saudi Arabia.

Abstract

We use Kolyada's inequality and its converse form and the work of António M. Caetano, Amiran Gogatishvili [17] to show sharp embeddings of Besov spaces $B_{1+\epsilon,1+\epsilon}^{0,\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$ (involving the zero classical smoothness and a logarithmic smoothness with the small exponent $\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}$) into Lorentz-Zygmund spaces. We also determine the small growth envelopes of spaces $B_{1+\epsilon,1+\epsilon}^{0,\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$. In distinction to the case when the classical smoothness is positive, we show that we cannot describe all embeddings in question in terms of the small growth envelopes

Keywords: Besov spaces with generalized smoothness; Lorentz-Zygmund spaces; Sharp embeddings; Growth envelopes
استخدم كلوديس عدم المساواة وشكلها المعاكس وعمل انطو يونيو ام كايتانو واميران غوغاتشفيلى [17] لاثبات الغمر القاطع في فضاءات بيسوف

تتضمن النعومة الكلاسيكية الصفرية والنعومة اللوغاريتمية مع الاس الصغير $B_{1+\epsilon,1+\epsilon}^{0,\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$ في فضاءات لورانت وايضا حساب اصغر نمو لمغلقات الفضاءات

للتعبير للحالة التي تكون فيها النعومة الكلاسيكية ايجابية بحيث ثبت انه لا يمكن وصف الغمر لاصغر نمو.

1. Introduction

We show sharp embeddings of Besov spaces $B_{1+\epsilon,1+\epsilon}^{0,\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}} = B_{1+\epsilon,1+\epsilon}^{0,\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \epsilon < \infty$, into Lorentz-Zygmund spaces $L_{1+\epsilon,1+3\epsilon;\gamma}^{loc} = L_{1+\epsilon,1+3\epsilon;\gamma}^{loc}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \epsilon \leq \infty$ and $\gamma \in \mathbb{R}$ following the full methodology of António M. Caetano, Amiran Gogatishvili [17]. The Besov spaces $B_{1+\epsilon,1+\epsilon}^{0,\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$, are defined by means of the modulus of continuity and they involve the zero classical smoothness and a logarithmic smoothness with the small exponent $\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}$ —cf. By the Lorentz-Zygmund space $L_{1+\epsilon,1+3\epsilon;\gamma}^{loc}$ we mean the set of all measurable functions on $\mathbb{R}^n$ with the finite quasi-norm

$$\left(\int_0^1 (1+\epsilon)^{\frac{1+3\epsilon}{1+\epsilon}} (1+|\ln(1+\epsilon)|)^{\gamma(1+3\epsilon)} f^*(1+\epsilon)^{1+3\epsilon} \frac{d(1+\epsilon)}{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+3\epsilon}} \quad (1)$$

(with the usual modification when $\epsilon = \infty$).

First, Theorem 3.1 (see [17]) mentioned below states that the (continuous) embedding

$$B_{1+\epsilon,1+\epsilon}^{0,\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}} \hookrightarrow L_{1+\epsilon,1+3\epsilon;\gamma}^{loc} \quad (2)$$

with

$$\gamma = \frac{\epsilon + 3\epsilon^2 - 1}{1 + 3\epsilon} + \frac{1}{\max\{1 + \epsilon, 1 + 3\epsilon\}} \quad (3)$$

holds if and only if $\epsilon \geq 0$. Consequently, when $\epsilon \geq 0$, (2) holds with any γ satisfying

$$\gamma \leq \frac{\epsilon + 3\epsilon^2 - 1}{1 + 3\epsilon} + \frac{1}{\max\{1 + \epsilon, 1 + 3\epsilon\}}.$$

Second, if $\epsilon \geq 0$, then, by Theorem 3.2 mentioned below, embedding (2) cannot hold with $\gamma > \frac{\epsilon + 3\epsilon^2 - 1}{1 + 3\epsilon} + \frac{1}{\max\{1 + \epsilon, 1 + 3\epsilon\}}$. This means that embedding (2) with γ given by (3) is sharp. Actually, Theorem 3.2 states even more. For example, it shows that we cannot make the target space in (2) (with γ from (3)) smaller by writing some small powers of iterated logarithms inside the quasi-norm (1) of the space $L_{1+\epsilon,1+3\epsilon;\gamma}^{loc}$ (see [17]).

There are two main ingredients of our proofs of these results. The first one is Kolyada's inequality recalled in Proposition 4.7. This inequality gives an estimate from below of the modulus of continuity of a function $f \in L_{1+\epsilon} = L_{1+\epsilon}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \epsilon < \infty$, in terms of its non-increasing rearrangement. The second one is the "inverse Kolyada inequality" which is formulated in Proposition 3.5 and showed in this paper. Using these inequalities, we can reduce embedding (2) to a reverse Hardy inequality restricted to the cone of non-increasing functions—cf. Proposition 3.6 ([17]).

Embeddings of Besov spaces into rearrangement invariant spaces were considered by Goldman [7], Goldman and Kerman [8], and Netrusov [14]. These authors used different methods and considered a more general setting. However, as mentioned in [7], the characterization of embedding (2) can be obtained from [14] only when $\epsilon = 0$, here. Furthermore, the methods used in [7] also do not allow to consider the full range of parameters. Indeed,

spaces was used. with this definition, the notion of the small growth envelope is meaningful even when $s = 0$, $0 \leq \epsilon \leq \infty$ and $1 \leq 1 + \epsilon \leq \min\{1 + \epsilon, 2\}$ (a so-called borderline case). The best what is known in such a case—cf. [12]—is that the growth envelope function is $(1 + \epsilon)^{\frac{1}{1+\epsilon}}$ (as expected), and that the fine index should be between $1 + \epsilon$.

Growth envelopes have been also studied for Besov spaces $B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{(s, \Psi)}$ in [4, 3, 9], where Ψ stands for a function of log-type and $s \in (0, \frac{n}{1+\epsilon}]$. We refer to [2, 10, 1] for results on growth envelopes of more general Besov (and also Triebel–Lizorkin) spaces of generalized smoothness. While in [2–4] the Fourier analytical definition of spaces was used, in [9, 10] an equivalent definition based on the modulus of smoothness was employed. On the other hand, no information has been obtained for the borderline case mentioned above when $s = 0$ and when all the known techniques do not work.

We determine the smallgrowth envelope of the Besovspace $B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$, (that is when $s = 0$) defined by means of the modulus of continuity that proved by [17]. If $0 \leq \epsilon < \infty$, then the smallgrowth envelope of the space $B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$ is the pair $((1 + \epsilon)^{\frac{1}{1+\epsilon}}(1 + |\ln(1 + \epsilon)|)^{-\epsilon}, \max\{1 + \epsilon, 1 + \epsilon\})$ —cf. Theorem 3.3. There are some interesting features of this result. In distinction to results on smallgrowth envelopes of Besov spaces $B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$ with $s \in (0, n/(1 + \epsilon)]$, the first index $1 + \epsilon$ plays a new role here: it is involved in the fine index, which is not $1 + \epsilon$ now but $\max\{1 + \epsilon, 1 + \epsilon\}$. Furthermore, another new phenomenon appears here. Namely, the embedding of the Besov space $B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$ given by Theorem 3.1 cannot be described in terms of the smallgrowth envelope of the space $B_{1+3\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$, when $0 \leq \epsilon < \infty$ —cf. 1 + 3\epsilon, 1 + \epsilon —cf. Remark 3.4. The paper is organized as follows. In Section 2 we give notation and basic definitions. Main results are presented in Section 3. Section 4 is devoted to auxiliary assertions. In subsequent sections (Sections 5–9) main results are shown.

2. Notation and basic definitions

Given two non-negative expressions $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$, the symbol $\mathcal{A} \lesssim \mathcal{B}$ means that $\mathcal{A} \lesssim c\mathcal{B}$ for some positive constant c independent of the variables in the expressions $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$. If $\mathcal{A} \lesssim \mathcal{B}$ and $\mathcal{B} \lesssim \mathcal{A}$, we write $\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$ and say that $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are equivalent.

Given a set A , its characteristic function is denoted by χ_A . Given two sets A and B , we write $A \Delta B$ for their symmetric difference. For $a \in \mathbb{R}^n$ and $\epsilon \geq 0$, the notation $B(a, 1 + \epsilon)$ stands for the small closed ball in $\mathbb{R}^n$ centred at a with radius $1 + \epsilon$. The volume of $B(0, 1)$ in $\mathbb{R}^n$ is denoted by V_n though, in general, we use the notation $|\cdot|_n$ for Lebesgue measure in $\mathbb{R}^n$.

Let Ω be a Borel subset of $\mathbb{R}^n$. The symbol $\mathcal{M}_0(\Omega)$ is used to denote the family of all complex-valued or extended real-valued (Lebesgue-)measurable functions defined and finite a.e. on Ω . By $\mathcal{M}_0^+(\Omega)$ we mean the subset of $\mathcal{M}_0(\Omega)$ consisting of those functions which are non-negative a.e. on Ω . If $\Omega = (a, a + \epsilon) \subset \mathbb{R}$, we write simply $\mathcal{M}_0(a, a + \epsilon)$ and $\mathcal{M}_0^+(a, a + \epsilon)$ instead of $\mathcal{M}_0((a, a + \epsilon))$ and $\mathcal{M}_0^+((a, a + \epsilon))$, respectively. By $\mathcal{M}_0^+(a, a + \epsilon; \downarrow)$ or $\mathcal{M}_0^+(a, a + \epsilon; \uparrow)$ we mean the collection of all $f \in \mathcal{M}_0^+(a, a + \epsilon)$ which are non-increasing or non-decreasing on $(a, a + \epsilon)$, respectively. Finally, by $AC(a, a + \epsilon)$ we denote the family of all real-valued functions which are locally absolutely continuous on $(a, a + \epsilon)$ (that is, absolutely continuous on any small closed subinterval of

is finite. When $\Omega = \mathbb{R}^n$, we simplify $L_{1+\epsilon}(\Omega)$ to $L_{1+\epsilon}$ and $\|\cdot\|_{1+\epsilon,\Omega}$ to $\|\cdot\|_{1+\epsilon}$.

Given $f \in L_{1+\epsilon}$, $0 \leq \epsilon < \infty$, the first difference operator Δ_h of step $h \in \mathbb{R}^n$ transforms f in $\Delta_h f$ defined by

$$(\Delta_h f)(x^2) := f(x^2 + h) - f(x^2), \quad x^2 \in \mathbb{R}^n,$$

whereas the modulus of continuity of f is given by

$$\omega_1^2(f, 1+\epsilon)_{1+\epsilon} := \sup_{\substack{h \in \mathbb{R}^n \\ |h| \leq 1+\epsilon}} \|\Delta_h f\|_{1+\epsilon}, \quad \epsilon \geq 0.$$

We introduce (see [17]) the Besov function spaces with the zero classical smoothness which we shall consider. The smoothness will be controlled by some small power of $\ell(1+\epsilon)$, where $\ell(1+\epsilon) := 1 + |\ln 1+\epsilon|$, $\epsilon \geq 0$.

Definition 2.1. Given $0 \leq \epsilon < \infty$, and $\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon} \in \mathbb{R}$,

$$B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}} := \left\{ f \in L_{1+\epsilon} : \|f\|_{B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}} := \|f\|_{1+\epsilon} + \left\| (1+\epsilon)^{-\frac{1}{1+\epsilon} \ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}} (1+\epsilon) \omega_1^2(f, 1+\epsilon)_{1+\epsilon} \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} < \infty \right\}.$$

Note that, since $\omega_1^2(f, 1+\epsilon)_{1+\epsilon} \lesssim \|f\|_{1+\epsilon}$, only the case $\left\| (1+\epsilon)^{-\frac{1}{1+\epsilon} \ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}} (1+\epsilon) \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} = \infty$ (or,

equivalently, $\epsilon \geq 0$ if $1+\epsilon$ is finite and $\epsilon > 0$ if $1+\epsilon$ is infinity) is of interest; otherwise $B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}} = L_{1+\epsilon}$.

We shall occasionally need the notion of Borel measure μ associated with a non-decreasing function $g : (a, a+\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, where $-\infty \leq \epsilon \leq \infty$. By this we mean the unique (non-negative) measure on the Borel subsets of $(a, a+\epsilon)$ such that $\mu([c, d]) = g(d) - g(c)$ for all $[c, d] \subset (a, a+\epsilon)$.

We show the notion of growth envelope of the function space A (see [12] for details).

Definition 2.2. Let $(A, \|\cdot\|_A) \subset \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ be a quasi-normed space such that $A \not\rightarrow L_\infty$. A positive, non-increasing, continuous function μ_h defined on some interval $(0, \epsilon]$, $\epsilon \in (0, 1)$, is called the (local) growth envelope function of the space A provided that

$$h(1+\epsilon) \approx \sup_{\|f\|_A \leq 1} f^*(1+\epsilon) \quad \text{for all } -1 < \epsilon \leq \epsilon - 1.$$

Given a growth envelope function h of the space A (determined up to equivalence near zero) and a number $u \in (0, \infty]$, we call the pair (h, u) the (local) growth envelope of the space A when the inequality

$$\left(\int_{(0, \epsilon)} \left(\frac{f^*(1+\epsilon)}{h(1+\epsilon)} \right) d\mu_h(1+\epsilon) \right)^{\frac{1}{1+2\epsilon}} \lesssim \|f\|_A$$

(with the usual modification when $\epsilon = \infty$) holds for all $f \in A$ if and only if the positive exponent $(1+2\epsilon)$ satisfies $1+2\epsilon \geq u$. Here μ_h is the Borel measure associated with the non-decreasing function $H(1+\epsilon) := -\ln h(1+\epsilon)$, $\epsilon > 0$. The component u in the growth envelope pair is called the fine index.

3. Main results (see [17])

Theorem 3.1. If $0 \leq \epsilon < \infty$, then the inequality

$$\left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)} \ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}} \frac{1}{\max\{1+\epsilon, 1+2\epsilon\}} \frac{\epsilon(1+2\epsilon)-1}{1+2\epsilon}} (1+\epsilon) f^*(1+\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \lesssim \|f\|_{B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}} \quad (4)$$

holds for all $f \in B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$, if and only if $\epsilon \geq 0$.

Theorem 3.2. Let $0 \leq \epsilon < \infty$, and let $\kappa \in \mathcal{M}_0^+(0, 1; \downarrow)$. Then the inequality

$$\left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)} \ell^{\frac{\epsilon+2\epsilon^2-1}{1+2\epsilon}} \frac{1}{\max\{1+\epsilon, 1+2\epsilon\}}} (1+\epsilon) \kappa(1+\epsilon) f^*(1+\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \lesssim \|f\|_{B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}} \quad (5)$$

holds for all $f \in B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$, if and only if κ is bounded.

is small enough. Since $H'(1+\epsilon) \approx \frac{1}{1+\epsilon}$ for all $\epsilon > 0$, the measure μ_H associated with the function H satisfies $d\mu_H(1+\epsilon) \approx \frac{d(1+\epsilon)}{1+\epsilon}$. Thus, by Definition 2.2 and Theorem 3.3,

$$\left\| (1+\epsilon)^{-\frac{1}{1+2\epsilon}} \frac{f^*(1+\epsilon)}{h(1+\epsilon)} \right\|_{1+2\epsilon, (0, \epsilon)} \lesssim \|f\|_{B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}} \quad \text{for all } f \in B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}} \quad (6)$$

provided that

$$1+2\epsilon \geq \max\{1+\epsilon, 1+\epsilon\}. \quad (7)$$

Hence, if (7) holds, then inequality (6) gives the same result as inequality (4) of Theorem 3.1. However, if $\epsilon > 0$, inequality (6) does not hold (cf. Theorem 3.2), while inequality (4) does. This means that the embeddings of Besov spaces $B_{1+3\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$, given by Theorem 3.1 cannot be described in terms of growth envelopes when $0 \leq \epsilon < \infty$.

Two of the main ingredients in the proofs of Theorems 3.1–3.3 are Proposition 4.7 (Kolyada's inequality) and Proposition 3.5 (which we call the "inverse" Kolyada inequality) mentioned below.

Proposition 3.5. (i) Let $f \in L_1$ and let $F(x^2) := f^*(V_n |x^2|^n)$, $x^2 \in \mathbb{R}^n$. Then

$$\begin{aligned} \omega_1^2(F, 1+\epsilon)_1 &\lesssim n \int_0^{(1+\epsilon)^n} f^*(s) ds + (n-1)(1+\epsilon) \int_{(1+\epsilon)^n}^\infty f^*(s) s^{-\frac{1}{n}} ds \\ &= (1+\epsilon) \left(\int_{(1+\epsilon)^n}^\infty s^{-1/n} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s)) du \frac{ds}{s} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

for all $\epsilon \geq 0$ and $f \in L_1$.

(ii) Let $0 < \epsilon < \infty$, $f \in L_{1+\epsilon}$ and let $F(x^2) = f^{**}(V_n |x^2|^n)$, $x^2 \in \mathbb{R}^n$. Then

$$\omega_1^2(F, 1+\epsilon)_{1+\epsilon} \lesssim (1+\epsilon) \left(\int_{(1+\epsilon)^n}^\infty s^{-\frac{1+\epsilon}{n}} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1+\epsilon} du \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}}$$

for all $\epsilon \geq 0$ and $f \in L_{1+\epsilon}$.

In fact, Propositions 4.7 and 3.5 enable us to reduce the embedding in question to the following assertion:

Proposition 3.6. Let $0 \leq \epsilon < \infty$, $\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon} \in \mathbb{R}$ and let ω^2 be a measurable function on $(0, 1)$. Then

$$\|\omega^2(1+\epsilon)f^*(1+\epsilon)\|_{1+2\epsilon, (0, 1)} \lesssim \|f\|_{B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}} \quad (9)$$

for all $f \in B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$, if and only if

$$\begin{aligned} \|\omega^2(1+\epsilon)f^*(1+\epsilon)\|_{1+2\epsilon, (0, 1)} &\lesssim \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}} (1+\epsilon) \left(\int_{(1+\epsilon)^n}^\infty s^{-\frac{1+\epsilon}{n}} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1+\epsilon} du \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+\epsilon, (0, 1)} \end{aligned} \quad (10)$$

for all $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ such that $|\text{supp } f|_n \leq 1$.

4. Preliminaries

The following easy estimates are quite useful and will be used without further notice whenever convenient: if $0 < \epsilon \leq \infty$ and $(a+\epsilon) \in \mathbb{R}$, then

$$\left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon(1+\epsilon)-1}{1+\epsilon}} \ell(1+\epsilon)^{a+\epsilon} \right\|_{1+\epsilon, (0, T)} \approx T^\epsilon \ell(T)^{a+\epsilon} \quad \text{and} \quad \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon(1+\epsilon)+1}{1+\epsilon}} \ell(1+\epsilon)^{a+\epsilon} \right\|_{1+\epsilon, (T, \infty)} \approx T^\epsilon \ell(T)^{a+\epsilon}$$

for all $T \in (0, \infty)$.

We shall also need the following geometric estimate (see [17]):

Proposition 4.1. For all $a, a+\epsilon \in \mathbb{R}$ and $\epsilon \geq 0$,

$$|B(a, 1+\epsilon) \Delta B(a+\epsilon, 1+\epsilon)|_n \lesssim |\epsilon|(1+\epsilon)^{n-1}. \quad (11)$$

Proof. Since the cases $\epsilon = 0$ or $\epsilon = -1$ are obvious, we assume that $\epsilon = 0$ and $\epsilon > 0$.

If $|\epsilon| > \frac{1+\epsilon}{2}$, then $|B(a, 1+\epsilon) \Delta B(a+\epsilon, 1+\epsilon)|_n \lesssim (1+\epsilon)^n < 2|\epsilon|(1+\epsilon)^{n-1}$ and (11) follows.

If $|\epsilon| \leq \frac{1+\epsilon}{2}$, then the inclusion $B(a, 1+\epsilon - |\epsilon|) \subset B(a+\epsilon, 1+\epsilon)$ and its symmetric counterpart $B(a+\epsilon, 1+\epsilon - |\epsilon|) \subset B(a, 1+\epsilon)$ imply that

$$B(a, 1+\epsilon) \Delta B(a+\epsilon, 1+\epsilon) \subset (B(a, 1+\epsilon) \setminus B(a, 1+\epsilon - |\epsilon|)) \cup (B(a+\epsilon, 1+\epsilon) \setminus B(a+\epsilon, 1+\epsilon - |\epsilon|)).$$

Consequently,

$$|B(a, 1+\epsilon) \Delta B(a+\epsilon, 1+\epsilon)|_n \lesssim (1+\epsilon)^n - (1+\epsilon - |\epsilon|)^n,$$

$$\leq |\epsilon|(1+\epsilon)^{n-1} \left(n + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} 2^{-(j-1)} \right) \approx |\epsilon|(1+\epsilon)^{n-1}.$$

Next we present two monotonicity results (see [17]):

Proposition 4.2. Given $\epsilon \geq 0$ and a non-increasing function $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, the function

$$1 + \epsilon \mapsto \int_0^{1+\epsilon} (g(s) - g(1+\epsilon))^{1+\epsilon} ds \quad (12)$$

is non-decreasing on $(0, \infty)$. In particular, if $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$, then the functions

$$1 + \epsilon \mapsto \int_0^{1+\epsilon} (f^*(s) - f^*(1+\epsilon))^{1+\epsilon} ds \quad (13)$$

and

$$1 + \epsilon \mapsto (1+\epsilon)(f^{**}(1+\epsilon) - f^*(1+\epsilon)) \quad (14)$$

are non-decreasing on $(0, \infty)$.

Proof. Given $0 < \epsilon < \infty$,

$$\int_0^{1+\epsilon} (g(s) - g(1+\epsilon))^{1+\epsilon} ds \leq \int_0^{1+2\epsilon} (g(s) - g(1+2\epsilon))^{1+\epsilon} ds \leq \int_0^{1+2\epsilon} (g(s) - g(1+2\epsilon))^{1+2\epsilon} ds.$$

Proposition 4.3. Let μ be a (non-negative) measure on $(0, \infty)$ such that $[1+\epsilon, \infty) \in (0, \infty)$ for all $0 \leq \epsilon < \infty$. Let $g \in \mathcal{M}_0^+(0, \infty; \mathbb{R})$. Then the function

$$1 + \epsilon \mapsto \mu[1+\epsilon, \infty)^{-1} \int_{[1+\epsilon, \infty)} g \, d\mu$$

is also non-decreasing on $(0, \infty)$.

Proof. First note that the conclusion is plain if $\int_{[1+\epsilon, \infty)} g \, d\mu$ is infinite for all $(1+\epsilon)$. On the other hand, if it is finite for some $(1+\epsilon)$, it is finite for all $(1+\epsilon)$ (due to the hypotheses of the proposition). Therefore, for $0 < \epsilon < \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu[1+\epsilon, \infty)} \int_{[1+\epsilon, \infty)} g \, d\mu &= \frac{\int_{[1+\epsilon, 1+2\epsilon)} g \, d\mu + \int_{[1+2\epsilon, \infty)} g \, d\mu}{\mu[1+\epsilon, \infty)} \leq \frac{\mu[1+\epsilon, 1+2\epsilon)g(1+2\epsilon) + \int_{[1+2\epsilon, \infty)} g \, d\mu}{\mu[1+\epsilon, \infty)} \\ &= \frac{\mu[1+\epsilon, 1+2\epsilon)\mu[1+2\epsilon, \infty)^{-1}\mu[1+2\epsilon, \infty)g(1+2\epsilon) + \int_{[1+2\epsilon, \infty)} g \, d\mu}{\mu[1+\epsilon, \infty)} \\ &\leq \frac{\mu[1+\epsilon, 1+2\epsilon)\mu[1+2\epsilon, \infty)^{-1} \int_{[1+2\epsilon, \infty)} g \, d\mu + \int_{[1+2\epsilon, \infty)} g \, d\mu}{\mu[1+\epsilon, \infty)} \\ &= \frac{\mu[1+\epsilon, 1+2\epsilon) + \mu[1+2\epsilon, \infty)}{\mu[1+\epsilon, \infty)\mu[1+2\epsilon, \infty)} \int_{[1+2\epsilon, \infty)} g \, d\mu = \frac{1}{\mu[1+2\epsilon, \infty)} \int_{[1+2\epsilon, \infty)} g \, d\mu. \end{aligned}$$

Now we proceed by recalling some properties of the maximal functions f^{**} of elements $f \in L_{1+\epsilon}, 0 \leq \epsilon \leq \infty$.

Such functions f are locally integrable in $\mathbb{R}^n$ and so the function $1 + \epsilon \mapsto \int_0^{1+\epsilon} f^*(s)ds$ belongs to $AC(0, \infty)$ and

$$\frac{d}{d(1+\epsilon)} \int_0^{1+\epsilon} f^*(s)ds = f^*(1+\epsilon) \text{ a.e. in } (0, \infty).$$

Consequently,

$$(f^{**})'(1+\epsilon) = -\frac{1}{1+\epsilon} (f^{**}(1+\epsilon) - f^*(1+\epsilon)) \text{ a.e. in } (0, \infty). \quad (15)$$

On the other hand, since the function $1 + \epsilon \mapsto \frac{1}{1+\epsilon}$ also belongs to $AC(0, \infty)$, the same can be said about f^{**} and we can write, for any $0 < \epsilon < \infty$,

$$f^{**}(1+2\epsilon) - f^{**}(1+\epsilon) = \int_{1+\epsilon}^{1+2\epsilon} (f^{**})'(s)ds = \int_{1+\epsilon}^{1+2\epsilon} ((f^{**})'(s) - f^*(s))ds \quad (16)$$

In order to prove the next proposition involving f^* and f^{**} , we need classical Hardy's inequalities (see, for example, [11, pp. 240, 244]) and [17].

Given $0 < \epsilon < \infty$ and a non-negative, measurable function f on $(0, \infty)$,

and that

$$\int_{[0,\infty]} \frac{v^2(s)}{s^{1+2\epsilon} + (1+\epsilon)^{1+\epsilon}} ds < \infty$$

for all $0 \leq \epsilon < \infty$. Then the inequality

$$\left(\int_0^\infty w^2(1+\epsilon) f^*(1+\epsilon)^{1+\epsilon} d(1+\epsilon) \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \lesssim \left(\int_0^\infty v^2(1+\epsilon) f^{**}(1+\epsilon)^{1+2\epsilon} d(1+\epsilon) \right)^{\frac{1}{1+2\epsilon}} \quad (19)$$

holds for all measurable f on $\mathbb{R}^n$ if and only if

$$\int_0^\infty \frac{(1+\epsilon)^{\frac{(1+2\epsilon)(1+\epsilon)}{\epsilon}} \sup_{y^2 \in (1+\epsilon, \infty)} y^{-\frac{2(1+2\epsilon)(1+\epsilon)}{\epsilon}} W(y^2)^{\frac{1+2\epsilon}{\epsilon}}}{(V(1+\epsilon) + (1+\epsilon)^{1+2\epsilon} \int_{1+\epsilon}^\infty s^{-(1+2\epsilon)} v^2(s) ds)^{\frac{1+3\epsilon}{\epsilon}}} V(1+\epsilon) \int_{1+\epsilon}^\infty s^{-(1+2\epsilon)} v^2(s) ds (1+\epsilon)^{2\epsilon} d(1+\epsilon) < \infty. \quad (20)$$

Proposition 4.9. Let $0 \leq \epsilon < \infty$, let v^2, w^2 be non-negative, locally integrable functions on $(0, \infty)$ and put $W(1+\epsilon) := \int_0^{1+\epsilon} w^2(s) ds, \epsilon \geq 0$. Consider the function

$$\varphi(1+\epsilon) := \operatorname{ess\,sup}_{s \in (0, 1+\epsilon)} s \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in (0, \infty)} \frac{v^2(\tau)}{\tau}, \quad 0 \leq \epsilon < \infty. \quad (21)$$

This function is quasi-concave (that is, φ is equivalent to a function in $\mathcal{M}_0^+(0, \infty; \uparrow)$ while $\frac{\varphi(1+\epsilon)}{1+\epsilon}$ is equivalent to a function in $\mathcal{M}_0^+(0, \infty; \downarrow)$). Assume that φ is non-degenerate, that is,

$$\lim_{1+\epsilon \rightarrow 0_+} \varphi(1+\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(1+\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\varphi(1+\epsilon)}{1+\epsilon} = \lim_{1+\epsilon \rightarrow 0_+} \frac{1+\epsilon}{\varphi(1+\epsilon)} = 0. \quad (22)$$

Let v^2 be a non-negative Borel measure on $[0, \infty)$ such that

$$\frac{1}{\varphi(1+\epsilon)^{1+\epsilon}} \approx \int_{[0, \infty)} \frac{dv^2(s)}{s^{1+\epsilon} + (1+\epsilon)^{1+\epsilon}} \text{ for all } 0 \leq \epsilon < \infty.$$

Then the inequality

$$\left(\int_0^\infty w^2(1+\epsilon) f^*(1+\epsilon)^{1+\epsilon} d(1+\epsilon) \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \lesssim \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq \epsilon < \infty} v^2(1+\epsilon) f^{**}(1+\epsilon) \quad (23)$$

holds for all measurable f on $\mathbb{R}^n$ if and only if

$$\int_{[0, \infty)} \sup_{s \in (1+\epsilon, \infty)} \frac{W(s)}{s^{1+\epsilon}} dv^2(1+\epsilon) < \infty. \quad (24)$$

5. Proof of Proposition 3.5

First we prove the following auxiliary result [17]:

Lemma 5.1. Let $g \in \mathcal{M}_0^+(0, \infty; \downarrow)$ and let $F(x^2) := g(V_n |x^2|^n), x^2 \in \mathbb{R}^n$. Then

$$\|\Delta_h F\|_1 \lesssim n \int_0^{V_n |h|^n} g(s) ds + (n-1) V_n^{1/n} |h| \int_{V_n |h|^n}^\infty g(s) s^{-1/n} ds \quad (25)$$

for all $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ and $g \in \mathcal{M}_0^+(0, \infty; \downarrow)$.

Moreover, if $g \in AC(0, \infty)$ and $0 \leq \epsilon < \infty$, then

$$\begin{aligned} \|\Delta_h F\|_{1+\epsilon} &\lesssim n \left(\int_0^{V_n 3^n |h|^n} (g(s) - g(V_n 3^n |h|^n))^{1+\epsilon} ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\ &\quad + |h| \left(\int_{V_n 2^n |h|^n}^\infty s^{(1-\frac{1}{n})(1+\epsilon)} \operatorname{ess\,sup}_{s/2^n \leq u \leq 3^n s/2^n} |g'(u)|^{1+\epsilon} ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \end{aligned} \quad (26)$$

for all $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ and $g \in \mathcal{M}_0^+(0, \infty; \downarrow) \cap AC(0, \infty)$.

Proof.

Step 1: Assume that $g \in \mathcal{M}_0^+(0, \infty; \downarrow)$. Then

$$\|\Delta_h F\|_1 = \int_{|x^2| < 2|h|} |F(x^2 + h) - F(x^2)| dx^2 + \int_{|x^2| > 2|h|} |F(x^2 + h) - F(x^2)| dx^2 =: I + II.$$

Using polar coordinates, the definition of F and a further change of variables, we obtain

$$\begin{aligned}
 &\lesssim \left(\int_{|x^2| > 2|h|} |h|^{1+\epsilon} |x^2|^{(n-1)(1+\epsilon)} \operatorname{ess\,sup}_{V_n|x^2|^n/2^n \leq u \leq V_n 3^n |x^2|^n/2^n} |g'(u)|^{1+\epsilon} dx^2 \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\
 &\approx |h| \left(\int_{2|h|}^{\infty} (1+\epsilon)^{(n-1)(1+\epsilon)} \operatorname{ess\,sup}_{V_n(1+\epsilon)^n/2^n \leq u \leq V_n 3^n(1+\epsilon)^n/2^n} |g'(u)|^{1+\epsilon} (1+\epsilon)^{n-1} d(1+\epsilon) \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\
 &\approx |h| \left(\int_{V_n 2^n |h|^n}^{\infty} s^{(1-\frac{1}{n})(1+\epsilon)} \operatorname{ess\,sup}_{s/2^n \leq u \leq 3^n s/2^n} |g'(u)|^{1+\epsilon} ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}}.
 \end{aligned}$$

Together with (30) and (29), this yields (26).

Proof of Proposition 3.5.

Step 1: To prove (i), take $f \in L_1$ and $g = f^*$ in Lemma 5.1. Consequently,

$$\|\Delta_h F\|_1 \lesssim n \int_0^{V_n |h|^n} f^*(s) ds + (n-1) V_n^{1/n} |h| \int_{V_n |h|^n}^{\infty} f^*(s) s^{-1/n} ds. \quad (31)$$

Applying Fubini's theorem and the fact that f^* is integrable on $(0, \infty)$, we can rewrite the last expression as

$$\begin{aligned}
 &V_n^{1/n} |h| \left(\int_{V_n |h|^n}^{\infty} s^{-1/n} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s)) du \frac{ds}{s} \right) \\
 &= V_n^{1/n} |h| \left(\int_{V_n |h|^n}^{\infty} s^{-1/n-1} \int_0^s f^*(u) du ds \right) - V_n^{1/n} |h| \left(\int_{V_n |h|^n}^{\infty} s^{-1/n-1} \int_0^s f^*(s) du ds \right) \\
 &= n \int_0^{V_n |h|^n} f^*(u) du + n V_n^{1/n} |h| \int_{V_n |h|^n}^{\infty} f^*(u) u^{-1/n} du - V_n^{1/n} |h| \int_{V_n |h|^n}^{\infty} f^*(s) s^{-1/n} ds \\
 &= n \int_0^{V_n |h|^n} f^*(u) du + (n-1) V_n^{1/n} |h| \int_{V_n |h|^n}^{\infty} f^*(u) u^{-1/n} du. \quad (32)
 \end{aligned}$$

When $n = 1$, it is plain that the right-hand side of (31) is non-decreasing in $|h|$. When $n > 1$, it is also non-decreasing in $|h|$, which can be seen from the equivalent expression given in (32) and from Proposition 4.3 (with $d\mu(s) = s^{-1/n-1} ds$ and $g(s) = n \int_0^s (f^*(u) - f^*(s)) du$; the fact that $g \in \mathcal{M}_0^+(0, \infty; \uparrow)$ follows from Proposition 4.2).

Now, (31) and (32) imply that

$$\begin{aligned}
 \omega_1^2(F, 1+\epsilon)_1 &\lesssim n \int_0^{V_n(1+\epsilon)^n} f^*(s) ds + (n-1) V_n^{1/n} (1+\epsilon) \int_{V_n(1+\epsilon)^n}^{\infty} f^*(s) s^{-1/n} ds \\
 &= V_n^{1/n} (1+\epsilon) \left(\int_{V_n(1+\epsilon)^n}^{\infty} s^{-1/n} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s)) du \frac{ds}{s} \right).
 \end{aligned}$$

In order to complete the proof of Proposition 3.5(i), note that the factors V_n and $V_n^{1/n}$ can be omitted in the preceding formulae (this follows again by arguments used in (32) and the discussion following it).

Step 2: To prove part (ii), take $f \in L_{1+\epsilon}$, $0 < \epsilon < \infty$, and $g = f^{**}$ in Lemma 5.1. Consequently,

$$\begin{aligned}
 \|\Delta_h F\|_{1+\epsilon} &\lesssim \left(\int_0^{V_n 3^n |h|^n} (f^{**}(s) - f^{**}(V_n 3^n |h|^n))^{1+\epsilon} ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\
 &+ |h| \left(\int_{V_n 2^n |h|^n}^{\infty} s^{(1-\frac{1}{n})(1+\epsilon)} \operatorname{ess\,sup}_{s/2^n \leq u \leq 3^n s/2^n} |(f^{**})'(u)|^{1+\epsilon} ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \quad (33)
 \end{aligned}$$

since $\in L_{1+\epsilon}$, (15) yields

$$(f^{**})'(u) = -\frac{1}{u} ((f^{**})'(u) - (f^*)'(u)) = -\frac{1}{u^2} \int_0^u (f^*(\tau) - f^*(u)) d\tau$$

a.e. in $(0, \infty)$. Therefore, a change of variables and Hölder's inequality show that the last term in (33) can be estimated from above (up to multiplicative positive constants) by

$$\begin{aligned}
 &|h| \left(\int_{V_n 2^n |h|^n}^{\infty} s^{(1-\frac{1}{n})(1+\epsilon)} s^{-2(1+\epsilon)} \left(\int_0^{3^n s/2^n} (f^*(\tau) - f^*(3^n s/2^n)) d\tau \right)^{1+\epsilon} ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\
 &\approx |h| \left(\int_{V_n 3^n |h|^n}^{\infty} u^{-(1+\epsilon)-\frac{1+\epsilon}{n}} \left(\int_0^u (f^*(\tau) - f^*(u)) d\tau \right)^{1+\epsilon} du \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\
 &\leq |h| \left(\int_{V_n 3^n |h|^n}^{\infty} u^{-1-\frac{1+\epsilon}{n}} \int_0^u (f^*(\tau) - f^*(u))^{1+\epsilon} d\tau du \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}}. \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$+ (1 + \epsilon) \left(\int_{V_n 3^n (1 + \epsilon)^n}^{\infty} s^{-1 - \frac{1 + \epsilon}{n}} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1 + \epsilon} du ds \right)^{\frac{1}{1 + \epsilon}}. \quad (35)$$

We claim that the latter sum is dominated by its last term. Indeed, we obtain by means of Remark 4.4 (recall that $0 < \epsilon < \infty$) and Proposition 4.2 that, for all $\epsilon \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{V_n 3^n (1 + \epsilon)^n} (f^{**}(u) - f^{**}(V_n 3^n (1 + \epsilon)^n))^{1 + \epsilon} du \right)^{\frac{1}{1 + \epsilon}} \leq \left(\int_0^{V_n 3^n (1 + \epsilon)^n} (f^{**}(u) - f^{**}(V_n 3^n (1 + \epsilon)^n))^{1 + \epsilon} du \right)^{\frac{1}{1 + \epsilon}} \\ &= \left(\int_0^{V_n 3^n (1 + \epsilon)^n} \left(\frac{1}{u} \int_0^u f^*(s) - f^*(V_n 3^n (1 + \epsilon)^n) ds \right)^{1 + \epsilon} du \right)^{\frac{1}{1 + \epsilon}} \\ &\lesssim \left(\int_0^{V_n 3^n (1 + \epsilon)^n} (f^*(u) - f^*(V_n 3^n (1 + \epsilon)^n))^{1 + \epsilon} du \right)^{\frac{1}{1 + \epsilon}} \\ &\approx \left(\int_{V_n 3^n (1 + \epsilon)^n}^{\infty} s^{-1 - \frac{1 + \epsilon}{n}} ds \right)^{\frac{1}{1 + \epsilon}} \left(\int_0^{V_n 3^n (1 + \epsilon)^n} (f^*(u) - f^*(V_n 3^n (1 + \epsilon)^n))^{1 + \epsilon} du \right)^{\frac{1}{1 + \epsilon}} \\ &= (1 + \epsilon) \left(\int_{V_n 3^n (1 + \epsilon)^n}^{\infty} s^{-1 - \frac{1 + \epsilon}{n}} \int_0^{V_n 3^n (1 + \epsilon)^n} (f^*(u) - f^*(V_n 3^n (1 + \epsilon)^n))^{1 + \epsilon} du ds \right)^{\frac{1}{1 + \epsilon}} \\ &\leq (1 + \epsilon) \left(\int_{V_n 3^n (1 + \epsilon)^n}^{\infty} s^{-1 - \frac{1 + \epsilon}{n}} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1 + \epsilon} du ds \right)^{\frac{1}{1 + \epsilon}}. \end{aligned}$$

To complete our proof, note that the factor $V_n 3^n$ can be omitted from the last term in (35) (as follows by arguments used in the discussion following (32)).

6. Proof of Proposition 3.6

We shall start with the following result [17]:

Lemma 6.1. Let $0 \leq \epsilon < \infty$, and $\frac{\epsilon + \epsilon^2 - 1}{1 + \epsilon} \in \mathbb{R}$. Let $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ satisfy $|\text{supp } f|_n \leq 1$ and

$$\left\| (1 + \epsilon)^{\frac{\epsilon}{1 + \epsilon}} \ell^{\frac{\epsilon + \epsilon^2 - 1}{1 + \epsilon}} (1 + \epsilon) \left(\int_{(1 + \epsilon)^n}^2 s^{-\frac{1 + \epsilon}{n}} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1 + \epsilon} du \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{1 + \epsilon}} \right\|_{1 + \epsilon, (0, 1)} < \infty. \quad (36)$$

Then $f \in L_{1 + \epsilon}$ and the function F defined by

$$F(x^2) = f^*(V_n |x^2|^n) \text{ if } \epsilon = 0 \text{ or } F(x^2) = f^{**}(V_n |x^2|^n) \text{ if } 0 < \epsilon < \infty \quad (37)$$

belongs to $B_{1 + \epsilon, 1 + \epsilon}^{0, \frac{\epsilon + \epsilon^2 - 1}{1 + \epsilon}}$. Moreover,

$$\begin{aligned} & \|F\|_{B_{1 + \epsilon, 1 + \epsilon}^{0, \frac{\epsilon + \epsilon^2 - 1}{1 + \epsilon}}} \\ &\lesssim \left\| (1 + \epsilon)^{\frac{\epsilon}{1 + \epsilon}} \ell^{\frac{\epsilon + \epsilon^2 - 1}{1 + \epsilon}} (1 + \epsilon) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\int_{(1 + \epsilon)^n}^2 s^{-\frac{1 + \epsilon}{n}} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1 + \epsilon} du \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{1 + \epsilon}} \right\|_{1 + \epsilon, (0, 1)} \quad (38) \end{aligned}$$

for all f mentioned above.

Proof. Take $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ with $|\text{supp } f|_n \leq 1$. Then $f^*(1 + \epsilon) = 0$ for $\epsilon \geq 0$. Therefore, when $s \in (1, \infty)$, $\int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1 + \epsilon} du = \int_0^s f^*(u)^{1 + \epsilon} du = \int_0^1 f^*(u)^{1 + \epsilon} du$. Hence,

$$\|f\|_{1 + \epsilon} = \left(\int_0^1 f^*(u)^{1 + \epsilon} du \right)^{\frac{1}{1 + \epsilon}} \approx \left(\int_1^2 s^{-\frac{1 + \epsilon}{n-1}} ds \int_0^1 f^*(u)^{1 + \epsilon} du \right)^{\frac{1}{1 + \epsilon}} \approx$$

$$\begin{aligned} & \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \left(\int_1^2 s^{-\frac{1+\epsilon}{n-1}} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1+\epsilon} du ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} \\ & \leq \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \left(\int_{(1+\epsilon)^n}^2 s^{-\frac{1+\epsilon}{n-1}} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1+\epsilon} du ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} \end{aligned} \quad (39)$$

Together with (36), this shows that $f \in L^{1+\epsilon}$.

On the other hand, using (39),

$$\begin{aligned} & \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \left(\int_{(1+\epsilon)^n}^\infty s^{-\frac{1+\epsilon}{n}} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1+\epsilon} du \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} \\ & \leq \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \left(\int_{(1+\epsilon)^n}^1 s^{-\frac{1+\epsilon}{n}} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1+\epsilon} du \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} \\ & \quad + \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \left(\int_{(1+\epsilon)^n}^\infty s^{-\frac{1+\epsilon}{n}} \int_0^1 f^*(u)^{1+\epsilon} du \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} \\ & \leq \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \left(\int_{(1+\epsilon)^n}^2 s^{-\frac{1+\epsilon}{n}} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1+\epsilon} du \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} \end{aligned} \quad (40)$$

Now, since $\|F\|_{1+\epsilon} \lesssim \|f\|_{1+\epsilon}$, (38) follows from Proposition 3.5 and estimates (39) and (40).

Proof of Proposition 3.6 (see [17]).

Step 1: Assume that (9) holds. Take $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ with $|\text{supp } f|_n \leq 1$. Then either the right-hand side of (10) is finite or infinite. If it is infinite, (10) is clear. So assume that the right-hand side of (10) is finite. In such a case, we apply Lemma 6.1 to get that the function F given by (37) satisfies (38). Using hypothesis (9) with F instead of f and the estimate $F^*(1+\epsilon) \geq f^*(1+\epsilon)$, inequality (10) follows.

Step 2: Assume now that (10) holds. Take $f \in B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$ with $|\text{supp } f|_n \leq 1$. Since $f \in L_{1+\epsilon}$, Proposition 4.7 and (10) yield (9).

Consider now a general $f \in B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$ and put $g(x^2) := f^*(V_n |x^2|^n)_{\chi_{[0,1]}}(V_n |x^2|^n)$, $x^2 \in \mathbb{R}^n$. Clearly, $|\text{supp } g|_n \leq 1$ and $g^*(1+\epsilon) = f^*(1+\epsilon)_{\chi_{[0,1]}}(1+\epsilon)$, $\epsilon \geq -1$. In particular, $g \in L_{1+\epsilon}$. Applying our hypothesis (10) to g instead of f and using Proposition 4.7, we arrive at

$$\begin{aligned} & \left\| \omega^2(1+\epsilon)f^*(1+\epsilon)_{\chi_{[0,1]}}(1+\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \right. \\ & \quad \left. + \epsilon \right\| \left(\int_{(1+\epsilon)^n}^1 s^{-\frac{1+\epsilon}{n}} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1+\epsilon} du \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} \\ & \quad + \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \left(\int_{(1+\epsilon)^n}^2 s^{-\frac{1+\epsilon}{n}} \int_0^1 f^*(u)^{1+\epsilon} du \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} \\ & \lesssim \left\| (1+\epsilon)^{\frac{1}{1+\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \omega_1^2(f, 1+\epsilon)_{1+\epsilon} \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} + \|f\|_{1+\epsilon} = \|f\|_{B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}} \end{aligned} \quad (41)$$

and (9) follows.

7. Proof of Theorem 3.1

To prove Theorem 3.1 (see [17]), we shall need a variant of Lemma 6.1. This is why we start with the following:

Remark 7.1. Lemma 6.1 continues to hold if we assume additionally that $\epsilon \geq 0$ and if expression (36) is replaced by

$$\begin{aligned}
 & + \left\| (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{1+2\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \left(\int_{(1+\epsilon)^n}^2 s^{-\frac{1+\epsilon}{n}} \int_{(1+\epsilon)^n}^s f^*(u)^{1+\epsilon} du \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\
 & \lesssim \left\| (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{1+2\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \left(\int_0^{(1+\epsilon)^n} f^*(u)^{1+\epsilon} du \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\
 & + \left\| (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{1+2\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \left(\int_{(1+\epsilon)^n}^2 f^*(u)^{1+\epsilon} \int_u^2 s^{-\frac{1+\epsilon}{n-1}} ds du \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\
 & \approx \left\| (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{1+2\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \left(\int_0^{1+\epsilon} f^*(u)^{1+\epsilon} du \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\
 & + \left\| (1+\epsilon)^{\frac{1+\epsilon}{n} \frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \int_{1+\epsilon}^1 u^{-\frac{1+\epsilon}{n}} f^*(u)^{1+\epsilon} du \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)}^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\
 & + \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+2\epsilon}\ell^{\epsilon+\epsilon^2-1}(1+\epsilon)} f^*(1+\epsilon)^{1+\epsilon} \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)}^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\
 & \lesssim \left\| (1+\epsilon)^{\frac{1}{1+2\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \left(\int_0^{1+\epsilon} f^*(u)^{1+\epsilon} du \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)}
 \end{aligned}$$

So, the conclusion follows immediately from Lemma 6.1.

Proof of Theorem 3.1.

Step 1: Here we prove the sufficiency of the condition $\epsilon \geq 0$ under the additional assumption (see [17]).

Due to Proposition 4.7, it is enough to show that, for all $f \in B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$,

$$\begin{aligned}
 & \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}\ell^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} f^*(1+\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\
 & \lesssim \|f\|_{1+\epsilon} \\
 & + \left\| (1+\epsilon)^{-\frac{1}{1+2\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \right. \\
 & \quad \times \left. \left(\int_{(1+\epsilon)^n}^\infty s^{-\frac{1+\epsilon}{n}} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1+\epsilon} du \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} \quad (42)
 \end{aligned}$$

(i) First consider the case $\epsilon = 0$.

Since $\int_0^{(1-\epsilon)^n} f^*(u) du \lesssim (1-\epsilon) \int_{(1-\epsilon)^n}^\infty s^{-1/n} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s)) du \frac{ds}{s}$ (cf. (32) with $\frac{1}{V_n^n} |h|$

replaced by $0 < \epsilon < 1$), we see that it is sufficient to prove that, for all $f \in B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$,

$$\begin{aligned}
 & \left\| (1-\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{1+2\epsilon}\ell^\epsilon(1-\epsilon)} f^*(1-\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\
 & \lesssim \|f\|_1 + \left\| (1-\epsilon)^{-\frac{1}{1+\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1-\epsilon)} \int_0^{(1-\epsilon)^n} f^*(s) ds \right\|_{1+\epsilon, (0,1)}. \quad (43)
 \end{aligned}$$

If $\epsilon = \infty$, then, by our assumption, also $\epsilon = \infty$ and (43) is trivial. Thus, we suppose that $0 \leq \epsilon < \infty$. For simplicity, we consider only the case when $\epsilon < \infty$ (the case $\epsilon = \infty$ can be handled similarly). Using the fact that

$$\lesssim \|f\|_1 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \ell^{\epsilon(1+2\epsilon)} (2^{-2^{k+1}}) \sum_{i=0}^{2^k-1} (2^{-2^{k+1}} 2^i)^{1+2\epsilon} f^* (2^{-2^{k+1}} 2^i)^{1+2\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+2\epsilon}}$$

Write $\frac{1}{1+2\epsilon} = \left(\frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon}\right)\left(\frac{1}{1+\epsilon}\right)$, take the exponent $\frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon}$ inside the outer sum and afterwards take the factor $\frac{1}{1+2\epsilon}$ of this exponent inside the inner sum (all this is possible because we are assuming $\epsilon \geq 0$), to get

$$\begin{aligned} & \left\| (1-\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{1+2\epsilon}} \ell^{\epsilon} (1-\epsilon) f^* (1-\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\ & \lesssim \|f\|_1 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \ell^{\epsilon+\epsilon^2} (2^{-2^k}) \left(\sum_{i=0}^{2^k-1} 2^{-2^{k+1}} 2^i f^* (2^{-2^{k+1}} 2^i) \right)^{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\ & \lesssim \|f\|_1 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \ell^{\epsilon+\epsilon^2} (2^{-2^k}) \left(\sum_{i=0}^{2^k-1} \int_{2^{-2^{k+1}} 2^{i-1}}^{2^{-2^k} 2^i} f^* (2^{-2^{k+1}} 2^i) \right)^{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\ & \leq \|f\|_1 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \ell^{\epsilon+\epsilon^2} (2^{-2^k}) \left(\int_0^{2^{-2^k}} f^* (1-\epsilon) \right)^{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\ & \approx \|f\|_1 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \ell^{\epsilon+\epsilon^2} (2^{-2^{k+1}}) - \ell^{\epsilon+\epsilon^2} (2^{-2^k}) \left(\int_0^{2^{-2^k}} f^* (s) \right)^{1+\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\ & \lesssim \|f\|_1 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-2^{k+1}}}^{2^{-2^k}} \ell^{\epsilon+\epsilon^2-1} (1-\epsilon) \left(\int_0^{1-\epsilon} f^* (s) \right)^{1+\epsilon} \frac{d(1+\epsilon)}{1-\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\ & \leq \|f\|_1 + \left\| (1-\epsilon)^{-\frac{1}{1+\epsilon}} \ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}} (1+\epsilon) \int_0^{1-\epsilon} f^* (s) ds \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} \end{aligned}$$

which, after a change of variables, proves (43).

(ii) Now consider the case $0 < \epsilon < \infty$. Using the monotonicity of function (13), we obtain, for all $\epsilon \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{(1+\epsilon)^n} (f^*(s) - f^*((1+\epsilon)^n))^{1+\epsilon} ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\ & \lesssim (1+\epsilon) \left(\int_{(1+\epsilon)^n}^{\infty} s^{-\frac{1+\epsilon}{n}} \int_0^s (f^*(u) - f^*(s))^{1+\epsilon} du \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \end{aligned}$$

Thus, in view of (42), it is enough to prove that

$$\begin{aligned}
 & \left\| (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^\epsilon (1+\epsilon) f^*(1+\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\
 & \lesssim \left\| (1+\epsilon)^{-\frac{1}{1+\epsilon} \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}} (1+\epsilon) \left(\int_0^{(1+\epsilon)^n} (f^*(s) - f^*(1+\epsilon)^n)^{1+\epsilon} ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+\epsilon, (0,1)}
 \end{aligned} \quad (44)$$

Applying the estimate $f^* \leq f^{**}$, (16) and the Hardy-type inequality from Proposition 4.6(ii), we arrive at

$$\begin{aligned}
 & \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} (1+\epsilon) f^*(1+\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\
 & \leq \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} (1+\epsilon) \left(f^{**}(1) + (f^{**}(1+\epsilon) - f^{**}(1)) \right) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\
 & \lesssim \|f\|_{1+\epsilon} + \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} (1+\epsilon) o \left((f^{**}(1+\epsilon) - f^{**}(1)) \right) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\
 & = \|f\|_{1+\epsilon} + \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} (1+\epsilon) \left(\int_{1+\epsilon}^1 \frac{f^{**}(s) - f^*(s)}{s} ds \right) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\
 & \lesssim \|f\|_{1+\epsilon} + \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^\epsilon (1+\epsilon) \left(f^{**}(1+\epsilon) - f^*(1+\epsilon) \right) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)}
 \end{aligned} \quad (45)$$

If $\epsilon = \infty$, we use Hölder's inequality to get

$$f^{**}(1+\epsilon) - f^*(1+\epsilon) \leq (1+\epsilon)^{-\frac{1}{1+\epsilon}} \left(\int_0^{1+\epsilon} (f^*(u) - f^*(1+\epsilon))^{1+\epsilon} du \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}}.$$

Consequently

$$\begin{aligned}
 & \left\| (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} (1+\epsilon) f^*(1+\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\
 & \lesssim \|f\|_{1+\epsilon} + \left\| (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^\epsilon (1+\epsilon) \left(\int_0^{1+\epsilon} (f^*(u) - f^*(1+\epsilon))^{1+\epsilon} du \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)},
 \end{aligned}$$

and (44) follows immediately since our assumption $\epsilon \geq 0$ implies that also $\epsilon = \infty$.

If $0 \leq \epsilon < \infty$, then (45), the obvious estimate

$$\left\| (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^\epsilon (1+\epsilon) (f^{**}(1+\epsilon) - f^*(1+\epsilon)) \right\|_{1+2\epsilon, (\frac{1}{4}, 1)} \leq \|f\|_{1+\epsilon}.$$

Eq. (44) and Proposition 4.5 show that it is enough to prove that

$$\begin{aligned}
 & \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^\epsilon (1+\epsilon) (f^{**}(1+\epsilon) - f^*(1+\epsilon)) \right\|_{1+2\epsilon, (0, \frac{1}{4})} \\
 & \lesssim \left\| (1+\epsilon)^{-\frac{1}{1+\epsilon} \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}} (1+\epsilon) \left(\int_0^{T^n} (f^{**}(s) - f^*(s))^{1+\epsilon} ds \right) \right\|_{1+\epsilon, (0,1)}
 \end{aligned} \quad (46)$$

For simplicity, we consider only the case when $\epsilon < \infty$ (the case $\epsilon = \infty$ can be handled similarly). Having the monotonicity of function (14) in mind, we obtain

$$\begin{aligned}
 & \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^\epsilon (1+\epsilon) (f^{**}(1+\epsilon) - f^*(1+\epsilon)) \right\|_{1+2\epsilon, (0, \frac{1}{4})} \\
 & = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-2k+1}}^{2^{-2k}} (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \ell^{\epsilon(1+2\epsilon)} (1+\epsilon) (f^{**}(1+\epsilon) - f^*(1+\epsilon))^{1+2\epsilon} d(1+\epsilon) \right)^{\frac{1}{1+2\epsilon}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \epsilon) \Big)^{\frac{1}{1+2\epsilon}} \\
 & \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{\epsilon(1+2\epsilon)} (2^{-2k}) \sum_{i=0}^{2^k-1} (2^{-2^{k+1}} 2^i)^{\frac{1+2\epsilon}{1+\epsilon}} \left(f^{**} (2^{-2^{k+1}} 2^{i+1}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - f^* (2^{-2^{k+1}} 2^{i+1}) \right)^{1+2\epsilon} \right)^{\frac{1}{1+2\epsilon}}
 \end{aligned} \tag{47}$$

Write $\frac{1}{1+2\epsilon} = \left(\frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon} \right) \left(\frac{1}{1+\epsilon} \right)$ and take the exponent $\frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon}$ inside the outer sum (since $\epsilon \geq 0$). Then the inner sum will have the exponent $\frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon}$, which we write as $\left(\frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon} \right) \left(\frac{1+\epsilon}{1+\epsilon} \right)$ and then take its factor $\frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon}$ inside the inner sum (since $\epsilon \geq 0$). This leads to an upper estimate by

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{\epsilon+\epsilon^2} (2^{-2k}) \left(\sum_{i=0}^{2^k-1} (2^{-2^{k+1}} 2^i) \left(f^{**} (2^{-2^{k+1}} 2^{i+1}) - f^* (2^{-2^{k+1}} 2^{i+1}) \right)^{1+\epsilon} \right) \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\
 & \text{The estimate } a = a^{1+\epsilon} a^{-\epsilon} \approx a^{1+\epsilon} \int_{2a}^{4a} (1+\epsilon)^{-(1+\epsilon)} d(1+\epsilon), \text{ for all } a := 2^{-2^{k+1}} 2^i, \text{ and the monotonicity} \\
 & \text{of functions (14) and (13) allow to dominate the last expression (up to a multiplicative positive constant) by} \\
 & \left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{\epsilon+\epsilon^2} (2^{-2k}) \left(\sum_{i=0}^{2^k-1} \int_{2^{-2^{k+1}} 2^{i+1}}^{2^{-2^{k+1}} 2^{i+2}} (f^{**}(1+\epsilon) - f^*(1+\epsilon))^{1+\epsilon} d(1+\epsilon) \right) \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\
 & \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{\epsilon+\epsilon^2} (2^{-2^{k+1}}) \left(\int_0^{2^{-2^{k+1}}+1} (f^{**}(s) - f^*(s))^{1+\epsilon} ds \right) \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\
 & \approx \left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{\epsilon+\epsilon^2} (2^{-2^{k+1}+1}) - \rho^{\epsilon+\epsilon^2} (2^{-2^{k+1}}) \left(\int_0^{2^{-2^{k+1}}+1} (f^{**}(s) - f^*(s))^{1+\epsilon} ds \right) \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\
 & \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-2^{k+1}+1}}^{2^{-2^{k+1}}} \rho^{\epsilon+\epsilon^2} ((1+\epsilon))(1+\epsilon)^{-1} \left(\int_0^{1+\epsilon} (f^{**}(s) - f^*(s))^{1+\epsilon} ds \right) \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\
 & = \left\| (1+\epsilon)^{-\frac{1}{1+\epsilon}} \rho^{\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}} (1+\epsilon) \left(\int_0^{1+\epsilon} (f^{**}(s) - f^*(s))^{1+\epsilon} ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+\epsilon, (0,1)}
 \end{aligned}$$

which, after a change of variables, together with the estimates obtained above, gives (46).

Step 2: Now, we prove the sufficiency of the condition $\epsilon \geq 0$ even when $\epsilon > 0$. Thus, assume that $\epsilon > 0$. It is enough to prove (42) (for all $\epsilon > 0$) but with

$$\left\| (1+\epsilon)^{-\frac{\epsilon}{(1+3\epsilon)(1+2\epsilon)}} \rho^{\frac{\epsilon^2(5+6\epsilon)}{(1+3\epsilon)(1+2\epsilon)}} (1+\epsilon) f^* (1+\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)}$$

on its left-hand side.

Essentially, we can follow part (ii) of Step 1. The only modifications are that the case $\epsilon = \infty$ does not occur and also the way used to estimate the expression corresponding to the last term in (47) by (48) is a different

then

$$f_{y^2}^*(1+\epsilon) = y^{-\frac{2}{1+3\epsilon}\ell^{-\frac{\epsilon+3\epsilon^2-1}{1+3\epsilon}}(y^2)} \chi_{[0,y^2]}(1+\epsilon) + (1+\epsilon)^{-\frac{1}{1+3\epsilon}\ell^{-\frac{\epsilon+3\epsilon^2-1}{1+3\epsilon}}(1+\epsilon)} \chi_{(y^2,\infty)}(1+\epsilon), \quad \epsilon \geq 0.$$

(i) Case $0 < \epsilon < \infty$.

Defining $F_{y^2}(x^2) = f_{y^2}^{**}(V_n|x^2|^n)$, $x^2 \in \mathbb{R}^n$, we get

$$\|F_{y^2}\|_{1+\epsilon} = \|F_{y^2}^*\|_{1+\epsilon} = \|f_{y^2}^{**}\|_{1+\epsilon} \lesssim \|f_{y^2}^*\|_{1+\epsilon} \lesssim \ell^{-\epsilon}(\omega^2) \approx 1 \text{ for } \omega^2 \in \left(0, \frac{\omega^2}{2}\right).$$

Moreover, Proposition 3.5(ii), a change of variables, the triangle inequality and the fact that $f_{y^2}^*$ is constant in $(0, y^2)$ imply that

$$\begin{aligned} & \left\| (1+\epsilon)^{-\frac{1}{1+\epsilon}\ell^{-\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \omega_1^2(F_{y^2}, 1+\epsilon)_{1+\epsilon} \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} \\ & \lesssim \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\ell^{-\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \right. \\ & \quad \times (1+\epsilon)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{1+\epsilon}^{\infty} s^{-\frac{1+\epsilon}{n-1}} \int_0^S \left(f_{y^2}^*(u) - f_{y^2}^*(s) \right)^{1+\epsilon} du ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \left. \right\|_{1+\epsilon, (0,1)} \\ & \lesssim \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\ell^{-\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}((1+\epsilon))(1+\epsilon)^{\frac{1}{n}} \right\|_{1+\epsilon, (0,y^2)} \left(\int_{1+\epsilon}^{\infty} s^{-\frac{1+\epsilon}{n-1}} \int_0^S \left(f_{y^2}^*(u) - f_{y^2}^*(s) \right)^{1+\epsilon} du ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\ & \quad + \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\ell^{-\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \right. \\ & \quad \times (1+\epsilon)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{1+\epsilon}^{\infty} s^{-\frac{1+\epsilon}{n-1}} \int_0^S \left(f_{y^2}^*(u) - f_{y^2}^*(s) \right)^{1+\epsilon} du ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \left. \right\|_{1+\epsilon, (y^2,1)} = A + B. \end{aligned} \quad (49)$$

Furthermore, since $f_{y^2}^*(u) - f_{y^2}^*(s) \leq f_{y^2}^*(u)$,

$$\begin{aligned} A & \lesssim y^{\frac{2}{n}\ell^{-\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(y^2)} \left(\int_{y^2}^{\infty} s^{-\frac{1+\epsilon}{n-1}} \int_{y^2}^S f_{y^2}^*(u)^{1+\epsilon} du ds + \int_{y^2}^{\infty} s^{-\frac{1+\epsilon}{n-1}} \int_0^{y^2} f_{y^2}^*(u)^{1+\epsilon} du ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \\ & \lesssim y^{\frac{2}{n}\ell^{-\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(y^2)} \left(y^{-\frac{2(1+\epsilon)}{n}\ell^{-(\epsilon+\epsilon^2)}(y^2)} + y^{-\frac{2(1+\epsilon)}{n}\ell^{-(\epsilon+\epsilon^2+1)}(y^2)} \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \lesssim \ell^{-\frac{1}{1+\epsilon}}(y^2) \lesssim 1 \end{aligned} \quad (50)$$

and

$$\begin{aligned} B & \lesssim \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\ell^{-\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)(1+\epsilon)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{1+\epsilon}^{\infty} s^{-\frac{1+\epsilon}{n-1}} \int_{y^2}^S f_{y^2}^*(u)^{1+\epsilon} du ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+\epsilon, (y^2,1)} \\ & \quad + \left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\ell^{-\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)(1+\epsilon)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{1+\epsilon}^{\infty} s^{-1+\epsilon/n-1} \int_0^S f_{y^2}^*(u)^{1+\epsilon} du ds \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+\epsilon, (y^2,1)} \\ & \lesssim \left\| (1+\epsilon)^{-\frac{1}{1+\epsilon}\ell^{-\frac{1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \right\|_{1+\epsilon, (y^2,1)} + \left\| (1+\epsilon)^{-\frac{1}{1+\epsilon}\ell^{-\frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)} \right\|_{1+\epsilon, (y^2,1)} \ell^{\frac{\epsilon+\epsilon^2+1}{1+\epsilon}}(y^2) \\ & \lesssim (\ln(y^2))^{\frac{1}{1+\epsilon}} \end{aligned} \quad (51)$$

$(0, \frac{\omega^2}{2})$. Therefore $F_{y^2} \in B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$ and $\|F_{y^2}\|_{B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}} \lesssim (\ln(y^2))^{\frac{1}{1+\epsilon}}$ for all

the inequality $f_{y^2}^* \leq f_{y^2}^{**} = F_{y^2}^*$ and the assumption $\epsilon > 0$ imply that, for all $y^2 \in$

$$\left\| (1+\epsilon)^{-\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^{\epsilon + \frac{\epsilon^2(5+6\epsilon)}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} (1+\epsilon) f^*(1+\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \lesssim (\ln(y^2))^{\frac{1}{1+\epsilon}}$$

the right-hand side of (52) can be estimated from below by

$$\left(\int_{y^2}^{\omega^2} (1+\epsilon)^{-1} \ell^{-1} (1+\epsilon) d(1+\epsilon) \right)^{\frac{1}{1+2\epsilon}} \approx (\ln(y^2))^{\frac{1}{1+2\epsilon}} \text{ for all } y^2 \in \left(0, \frac{\omega^2}{2}\right)$$

that it must be $\epsilon \geq 0$.

slightly modify the approach of part (i). Now, we put $F_{y^2}(x^2) := f_{y^2}^*(V_n | x^2|^n)$.

3.5(i) (with the expression on the second line of (8)) instead of Proposition 3.5(ii) a $= f_{y^2}^*$.

4: Now we prove the necessity of the condition $\epsilon \geq 0$.

the contrary, suppose that $\epsilon > 0$. Hence, $0 \leq \epsilon \leq \infty$.

the (4) is assumed to hold for all functions from $B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+3\epsilon^2-1}{1+3\epsilon}}$, Proposition 3.6 and Remark

$$\begin{aligned} & \left\| (1+\epsilon)^{-\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^{\epsilon + \frac{\epsilon^2(5+6\epsilon)}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} (1+\epsilon) f^*(1+\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\ & \lesssim \left\| (1+\epsilon)^{\frac{1}{1+3\epsilon}} \ell^{\frac{\epsilon+3\epsilon^2-1}{1+3\epsilon}} (1+\epsilon) \left(\int_0^{1+\epsilon} f^*(u)^{1+\epsilon} du \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+3\epsilon, (0,1)} \end{aligned}$$

$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ with $|\text{supp } f|_n \leq 1$. One can see that (53) remains true if we on 1 . (Indeed, if $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$, take $f_1 := f^*(V_n |\cdot|^n) \chi_{[0,1]}(V_n |\cdot|^n)$. Consequer for all $0 \leq \epsilon < 1$, and $|\text{supp } f_1|_n \leq 1$. Thus, applying (53) to f_1 , we obtain th $f := |g|^{\frac{1}{1+\epsilon}}$. Then (53) yields

$$\left\| (1+\epsilon)^{-\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^{\epsilon(1+\epsilon)} (1-\epsilon) g^*(1-\epsilon) \right\|_{\frac{1+2\epsilon}{1+\epsilon}, (0,1)} \lesssim \left(\int_0^\infty v^2 (1-\epsilon) g^{**}(1-\epsilon)^{\frac{1+3\epsilon}{1+\epsilon}} d(1-\epsilon) \right)$$

$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ (or even for any measurable function g on $\mathbb{R}^n$).

that $0 \leq \epsilon < \infty$. Then (54) implies that the inequality

$$\left(\int_0^\infty w^2 (1-\epsilon) g^{**}(1-\epsilon)^{\frac{1+2\epsilon}{1+\epsilon}} d(1-\epsilon) \right)^{\frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon}} \lesssim \left(\int_0^\infty v^2 (1-\epsilon) g^{**}(1-\epsilon) d(1-\epsilon) \right)$$

measurable g on $\mathbb{R}^n$, where, for all $0 \leq \epsilon < \infty$,

$$w^2(1+\epsilon) = (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}} \ell^{\epsilon(1+2\epsilon)} (1+\epsilon) \chi_{(0,1)}(1+\epsilon)$$

$$v^2(1+\epsilon) = (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}} \ell^{\epsilon+\epsilon^2-1} (1+\epsilon) \chi_{(0,1)}(1+\epsilon) + \chi_{[1,\infty)}(1+\epsilon).$$

on $4.8\epsilon \geq 0$, inequality (55) holds only if

$$\begin{aligned} & (1+\epsilon)^{\frac{(1+2\epsilon)}{\epsilon}} \sup_{y^2 \in [1+\epsilon, 1)} y^{-\frac{2(1+2\epsilon)}{\epsilon}} \\ & \times \frac{\left(y^{\frac{2(1+2\epsilon)}{\epsilon}} \ell^{(\epsilon+\epsilon^2)(\frac{1+2\epsilon}{\epsilon})} (y^2) \right)}{\left((1+\epsilon)^{-\ell^{\epsilon+\epsilon^2-1}} (1+\epsilon) + (1+\epsilon)^{-\left(\int_{1+\epsilon}^1 s^{-1} \left(s^{\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}} \ell^{\epsilon+\epsilon^2-1}(s) \right) ds + \int_1^\infty s \right)} \right)} \end{aligned}$$

for all $y^2 \in (0, \frac{\omega^2}{2})$. Therefore $F_{y^2} \in B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$ and $\|F_{y^2}\|_{B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}} \lesssim (\ln(y^2))^{\frac{1}{1+\epsilon}}$ for all $y^2 \in (0, \frac{\omega^2}{2})$. This

estimate, (4), the inequality $f_{y^2}^* \leq f_{y^2}^{**} = F_{y^2}^*$ and the assumption $\epsilon > 0$ imply that, for all $y^2 \in (0, \frac{\omega^2}{2})$,

$$\left\| (1+\epsilon)^{-\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^{\epsilon+\frac{\epsilon^2(5+6\epsilon)}{(1+3\epsilon)(1+2\epsilon)}} (1+\epsilon) f^*(1+\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \lesssim (\ln(y^2))^{\frac{1}{1+\epsilon}}. \quad (52)$$

Since the left-hand side of (52) can be estimated from below by

$$\left(\int_{y^2}^{\omega^2} (1+\epsilon)^{-1} \ell^{-1} (1+\epsilon) d(1+\epsilon) \right)^{\frac{1}{1+2\epsilon}} \approx (\ln(y^2))^{\frac{1}{1+2\epsilon}} \text{ for all } y^2 \in \left(0, \frac{\omega^2}{2}\right),$$

we conclude that it must be $\epsilon \geq 0$.

We slightly modify the approach of part (i). Now, we put $F_{y^2}(x^2) := f_{y^2}^*(V_n |x^2|^n)$, $x^2 \in \mathbb{R}^n$, we apply Proposition 3.5(i) (with the expression on the second line of (8)) instead of Proposition 3.5(ii) and make use of the equality $F_{y^2}^* = f_{y^2}^*$.

Step 4: Now we prove the necessity of the condition $\epsilon \geq 0$.

On the contrary, suppose that $\epsilon > 0$. Hence, $0 \leq \epsilon \leq \infty$.

Since (4) is assumed to hold for all functions from $B_{1+\epsilon, 1+3\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+3\epsilon^2-1}{1+3\epsilon}}$, Proposition 3.6 and Remark 7.1 imply that

$$\begin{aligned} & \left\| (1+\epsilon)^{-\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^{\frac{\epsilon^2(5+6\epsilon)}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} (1+\epsilon) f^*(1+\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0,1)} \\ & \lesssim \left\| (1+\epsilon)^{\frac{1}{1+3\epsilon}} \ell^{\frac{\epsilon+3\epsilon^2-1}{1+3\epsilon}} (1+\epsilon) \left(\int_0^{1+\epsilon} f^*(u)^{1+\epsilon} du \right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \right\|_{1+3\epsilon, (0,1)} \end{aligned} \quad (53)$$

for all $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ with $|\text{supp } f|_n \leq 1$. One can see that (53) remains true if we omit the assumption $|\text{supp } f|_n \leq 1$. (Indeed, if $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$, take $f_1 := f^*(V_n |\cdot|^n) \chi_{(0,1)}(V_n |\cdot|^n)$. Consequently, $f_1^*(1-\epsilon) = f^*(1-\epsilon)$ for all $0 \leq \epsilon < 1$, and $|\text{supp } f_1|_n \leq 1$. Thus, applying (53) to f_1 , we obtain the result.) Let $g \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ and $f := |g|^{\frac{1}{1+\epsilon}}$. Then (53) yields

$$\left\| (1-\epsilon)^{-\frac{\epsilon}{(1+2\epsilon)(1+\epsilon)}} \ell^{\epsilon(1+\epsilon)} (1-\epsilon) g^*(1-\epsilon) \right\|_{\frac{1+2\epsilon}{1+\epsilon}, (0,1)} \lesssim \left(\int_0^\infty v^2(1-\epsilon) g^{**}(1-\epsilon)^{\frac{1+3\epsilon}{1+\epsilon}} d(1+\epsilon) \right)^{\frac{1+\epsilon}{1+3\epsilon}} \quad (54)$$

for all $g \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ (or even for any measurable function g on $\mathbb{R}^n$).

Assume first that $0 \leq \epsilon < \infty$. Then (54) implies that the inequality

$$\left(\int_0^\infty w^2(1-\epsilon) g^{**}(1-\epsilon)^{\frac{1+2\epsilon}{1+\epsilon}} d(1-\epsilon) \right)^{\frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon}} \lesssim \left(\int_0^\infty v^2(1-\epsilon) g^{**}(1-\epsilon) d(1-\epsilon) \right) \quad (55)$$

holds for all measurable g on $\mathbb{R}^n$, where, for all $0 \leq \epsilon < \infty$,

$$w^2(1+\epsilon) = (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}} \ell^{\epsilon(1+2\epsilon)} (1+\epsilon) \chi_{(0,1)}(1+\epsilon)$$

and

$$v^2(1+\epsilon) = (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}} \ell^{\epsilon+\epsilon^2-1} (1+\epsilon) \chi_{(0,1)}(1+\epsilon) + \chi_{[1,\infty)}(1+\epsilon).$$

By Proposition 4.8 $\epsilon \geq 0$, inequality (55) holds only if

$$\begin{aligned} & \infty > \int_0^1 (1+\epsilon)^{\frac{(1+2\epsilon)}{\epsilon}} \sup_{y^2 \in [1+\epsilon, 1)} y^{-\frac{2(1+2\epsilon)}{\epsilon}} \\ & \quad \times \frac{\left(y^{\frac{2(1+2\epsilon)}{\epsilon}} \ell^{\epsilon+\epsilon^2} (y^2)^{\frac{(1+2\epsilon)}{\epsilon}} \right)}{\left((1+\epsilon) \ell^{\epsilon+\epsilon^2-1} (1+\epsilon) + (1+\epsilon) \left(\int_{1+\epsilon}^1 s^{-1} \left(s^{\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}} \ell^{\epsilon+\epsilon^2-1}(s) \right) ds + \int_1^\infty s^{-1} ds \right) \right)^{\frac{1+4\epsilon}{\epsilon}}} \\ & \quad \times (1+\epsilon)^{\frac{1+3\epsilon}{1+\epsilon}} \ell^{\epsilon+3\epsilon^2-1} (1+\epsilon) \int_{1+\epsilon}^1 s^{-\frac{1+3\epsilon}{1+\epsilon}} \left(s^{\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}} \ell^{\epsilon+3\epsilon^2-1}(s) \right) ds (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}} d(1+\epsilon) =: I. \end{aligned}$$

However,

$$\frac{((1+\epsilon)(1+2\epsilon))(1+\epsilon)\ell^{\epsilon+\epsilon^2-1}(1+\epsilon)\ell^{\epsilon+3\epsilon^2}((1+\epsilon))(1+\epsilon)^{-1}}{\left(\ell^{\epsilon+\epsilon^2-1}(1+\epsilon) + \left(\ell^{\epsilon+\epsilon^2}(1+\epsilon) + \frac{1+\epsilon}{2\epsilon}\right)^{\frac{1+4\epsilon}{\epsilon}}\right)^{\frac{1+4\epsilon}{\epsilon}}} \approx \int_0^{\frac{1}{2}} (1+\epsilon)^{-1}\ell^{\epsilon}$$

contradiction. Consequently, $\epsilon \geq 0$.

that $\epsilon = \infty$. Therefore, $\epsilon > 0$. Inequality (54) implies that

$$\sup_{0 \leq \epsilon < \infty} w^2(1+\epsilon)g^*(1+\epsilon)^{\frac{1+2\epsilon}{1+\epsilon}}d(1+\epsilon)^{\frac{1+\epsilon}{1+2\epsilon}} \lesssim \sup_{0 \leq \epsilon < \infty} v^2(1+\epsilon)g^{**}(1+\epsilon)$$

measurable in $\mathbb{R}^n$, where, for all $0 \leq \epsilon < \infty$,

$$w^2(1+\epsilon) = (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{1+\epsilon}}\ell^{\frac{(\epsilon+\epsilon^2-1)(1+2\epsilon)}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)\chi_{(0,1)}(1+\epsilon)$$

$v^2(1+\epsilon) = (1+\epsilon)\ell^{\frac{(\epsilon+3\epsilon^2-1)(1+\epsilon)}{1+3\epsilon}}(1+\epsilon)\chi_{(0,1)}(1+\epsilon) + \ell(1+\epsilon)\chi_{[1,\infty)}(1+\epsilon)$ is a probability measure on $[0, \infty)$ which is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure.

$$dv^2(1+\epsilon) = \begin{cases} (1-\epsilon)^{-1}\ell^{\frac{-(\epsilon+\epsilon^2-1)(1+2\epsilon)}{1+\epsilon}-1}(1-\epsilon)d(1+\epsilon) & \text{if } 0 \leq \epsilon < 1, \\ (1+\epsilon)^{\frac{1+2\epsilon}{\epsilon}}\ell^{\frac{1+2\epsilon}{\epsilon}}(1+\epsilon)d(1+\epsilon) & \text{if } \epsilon > 0. \end{cases}$$

$$I \geq \int_0^1 \left(\sup_{s \in (1+\epsilon, 1)} \ell^{\frac{(\epsilon+\epsilon^2-1)(1+2\epsilon)}{1+\epsilon}}(s) \right) (1+\epsilon)^{-1}\ell^{\frac{-(\epsilon+\epsilon^2-1)(1+2\epsilon)}{1+\epsilon}-1}(1+\epsilon)d(1-\epsilon) \\ \approx \int_0^1 (1+\epsilon)^{-1}\ell^{-1}(1+\epsilon)d(1+\epsilon) = 0,$$

contradiction. Consequently, $\epsilon \geq 0$.

Theorem 3.2

From Theorem 3.1, the sufficiency of the condition that κ is bounded is obvious. The necessity is also necessary (see [17]).

1: Assume $\epsilon \geq 0$. Take $y^2 \in (0, 1/2)$ and $f_{y^2} \in L_{1+\epsilon}(\mathbb{R}^n)$ with $f_{y^2}^* = \chi[0, y^2]$. It is easy to see that $\|f_{y^2}^*\|_{1+\epsilon} = y^{\frac{2}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)^{\frac{1}{1+\epsilon}}$ and $y^2 \in (0, 1/2)$.

Case $0 < \epsilon < \infty$.

Since $F_{y^2}(x^2) = f_{y^2}^{**}(V_n|x^2|^n)$, $x^2 \in \mathbb{R}^n$, we get $\|F_{y^2}\|_{1+\epsilon} = \|F_{y^2}^*\|_{1+\epsilon} = \|f_{y^2}^{**}\|_{1+\epsilon}$.

For all $y^2 \in (0, 1/2)$. Moreover, Proposition 3.5(ii) and (57) imply that $\omega_1^2(F_{y^2}, 1+\epsilon) \lesssim y^{\frac{2}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)y^2(\frac{1}{1+\epsilon}-\frac{1}{n})$ for all $y^2 \in (0, 1/2)$ and $\epsilon \geq 0$. Hence,

$$\left\| (1+\epsilon)^{-\frac{1}{1+3\epsilon}}\ell^{\frac{\epsilon+3\epsilon^2-1}{1+3\epsilon}}(1+\epsilon)\omega_1^2(F_{y^2}, 1+\epsilon) \right\|_{1+3\epsilon, (0,1)} \\ \lesssim y^{2(\frac{1}{1+\epsilon}-\frac{1}{n})} \left\| (1+\epsilon)^{\frac{2\epsilon}{1+3\epsilon}}\ell^{\frac{\epsilon+3\epsilon^2-1}{1+3\epsilon}}(1+\epsilon) \right\|_{1+3\epsilon, (0, \frac{2}{y^{\frac{2}{n}}})} \\ + \left\| y^{\frac{2}{1+\epsilon}}(1+\epsilon)^{-\frac{1}{1+3\epsilon}}\ell^{\frac{\epsilon+3\epsilon^2-1}{1+3\epsilon}}(1+\epsilon) \right\|_{1+3\epsilon, (y^{\frac{2}{n}}, 1)}$$

For $y^2 \in (0, 1/2)$. Therefore, $F_{y^2} \in B_{1+\epsilon, 1+3\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+3\epsilon^2-1}{1+3\epsilon}}$ and

$$\|F_{y^2}\|_{B_{1+\epsilon, 1+3\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+3\epsilon^2-1}{1+3\epsilon}}} \lesssim y^{\frac{2}{1+\epsilon}}\ell^\epsilon(y^2) \text{ for all } y^2 \in (0, 1/2).$$

Consequently, (5), the inequality $f_{y^2}^* \leq f_{y^2}^{**} = F_{y^2}$ and the assumption $\epsilon \geq 0$ imply that

$$\left\| (1+\epsilon)^{\frac{\epsilon}{(1+2\epsilon)(1+\epsilon)}}\ell^\epsilon(1+\epsilon)\kappa(1+\epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0, y^2)} \lesssim y^{\frac{2}{1+\epsilon}}\ell^\epsilon(y^2).$$

$$\kappa(y^2)y^{\frac{2}{1+\epsilon}}\ell^\epsilon(y^2) \lesssim y^{\frac{2}{1+\epsilon}}\ell^\epsilon(y^2) \text{ for all } y^2 \in (0, 1/2).$$

Hence, κ must be bounded.

(ii) Case $\epsilon = 0$.

Defining $F_{y^2}(x^2) = f_{y^2}^*(V_n|x^2|^n, x^2 \in \mathbb{R}^n)$, we get $\|F_{y^2}\|_1 = \|F_{y^2}^*\|_1 = \|f_{y^2}^*\|_1 = y^2$. Moreover,

Proposition 3.5(i) and (57) yield $\omega_1^*(F_{y^2}, 1 + \epsilon)_1 \lesssim \min \{y^2, (1 + \epsilon)y^{2(1-\frac{1}{1+\epsilon})}\}$ for all $y^2 \in (0, 1/2)$ and $\epsilon \geq 0$.

The rest follows essentially as in part (i) (now with $\epsilon = 0$ and $F_{y^2}^* = f_{y^2}^*$).

Step 2: Assume now that $0 \leq \epsilon < \infty$. In particular, $\epsilon > 0$.

For any given $y^2 \in (0, 1/2)$, put
 $f_{y^2}(x^2) := y^{-\frac{2}{1+2\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon}{(1+2\epsilon)(1+\epsilon)}}(y^2)} \chi_{[0, y^2]}(V_n|x^2|^n) + (V_n|x^2|^n)^{-\frac{1}{1+3\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon}{(1+2\epsilon)(1+2\epsilon)}}(V_n|x^2|^n)} \chi_{(y^2, 1)}(V_n|x^2|^n), x^2 \in \mathbb{R}^n$. Then

$$f_{y^2}^*(1 + \epsilon) = y^{-\frac{2}{1+3\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon}{(1+2\epsilon)(1+2\epsilon)}}(y^2)} \chi_{(0, y^2]}(1 + \epsilon) + (1 + \epsilon)^{-\frac{1}{1+3\epsilon}\ell^{\frac{\epsilon}{(1+2\epsilon)(1+2\epsilon)}}(1 + \epsilon)} \chi_{(y^2, 1)}(1 + \epsilon),$$

$$\epsilon \geq 0.$$

We proceed as in part (i) of Step 3 of the proof of Theorem 3.1. Defining $F_{y^2}(x^2) = f_{y^2}^{**}(V_n|x^2|^n, x^2 \in \mathbb{R}^n)$, we see that $\|F_{y^2}\|_{1+3\epsilon} \lesssim \ell^{\frac{1}{1+2\epsilon}}(y^2)$ for all $y^2 \in (0, 1/2)$. Moreover, we obtain (49), where now

$$A \lesssim \ell^{\frac{\epsilon+2\epsilon^2-1}{1+2\epsilon}}(y^2) \text{ and } B \lesssim \ell^{\frac{\epsilon+2\epsilon^2-1}{1+2\epsilon}}(y^2)$$

for all $y^2 \in (0, 1/2)$. Therefore, $F_{y^2} \in B_{1+3\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+3\epsilon^2-1}{1+3\epsilon}}$ and $\|F_{y^2}\|_{B_{1+3\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+3\epsilon^2-1}{1+3\epsilon}}} \lesssim \ell^{\frac{\epsilon+2\epsilon^2-1}{1+2\epsilon}}(y^2)$ for all $y^2 \in (0, 1/2)$. This

estimate, (5), the inequality $f_{y^2}^* \leq f_{y^2}^{**} = F_{y^2}^*$ and the assumption $\epsilon > 0$ imply that

$$\left\| (1 + \epsilon)^{\frac{\epsilon}{(1+2\epsilon)(1+\epsilon)}} \ell^{\frac{3\epsilon}{1+\epsilon}}(1 + \epsilon) \kappa(1 + \epsilon) f_{y^2}^*(1 + \epsilon) \right\|_{1+\epsilon, (y^2, y)} \lesssim \ell^{\frac{\epsilon+2\epsilon^2-1}{1+2\epsilon}}(y^2)$$

for all $y^2 \in (0, 1/2)$. Since the left-hand side of the last expression can be estimated from below by

$$\kappa(y) \left\| (1 + \epsilon)^{-\frac{1}{1+\epsilon}} \ell^{\epsilon}(1 + \epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (y^2, y)} \approx \kappa(y) \ell^{\frac{\epsilon+2\epsilon^2-1}{1+2\epsilon}}(y^2) \text{ for all } y^2 \in (0, 1/2),$$

we conclude that κ must be bounded.

9. Proof of Theorem 3.3 (see [17])

We refer only to the case $0 < \epsilon < \infty$; the case $\epsilon = 0$ can be easily adapted.

Put $A := B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$. By Theorem 3.1 with $\epsilon = \infty$,

$$(1 + \epsilon)^{\frac{1}{1+\epsilon}} \ell^{\epsilon}(1 + \epsilon) f^*(1 + \epsilon) \lesssim 1$$

for all $0 < \epsilon < 1$ and $f \in A$ with $\|f\|_A \leq 1$. Therefore,

$$\sup_{\|f\|_A \leq 1} f^*(1 - \epsilon) \lesssim (1 - \epsilon)^{-\frac{1}{1+\epsilon}} \ell^{-\epsilon}(1 - \epsilon) \text{ for all } 0 < \epsilon < 1. \quad (59)$$

On the other hand, consider the functions $F_{y^2}, y^2 \in (0, 1/2)$, from Step 1 of the proof of Theorem 3.2. By (58), there exists $c > 0$ such that

$$\|F_{y^2}\|_A \leq c y^{\frac{2}{1+\epsilon}} \ell^{\epsilon}(y^2) \text{ for all } y^2 \in (0, 1/2).$$

Together with the inequality $F_{y^2}^* \equiv f_{y^2}^{**} \geq f_{y^2}^* \equiv \chi_{[0, y^2]}$, this implies that

$$\sup_{\|f\|_A \leq 1} f^*(1 + \epsilon) \geq c^{-1} y^{-\frac{2}{1+\epsilon}} \ell^{-\epsilon}(y^2) \chi_{[0, y^2]}(1 + \epsilon) \quad (60)$$

for all $\epsilon \geq 0$ and $y^2 \in (0, 1/2)$. Thus, taking $y^2 = 2(\frac{1}{4} - \epsilon)$ for every $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$, we obtain from (60) that

$$\sup_{\|f\|_A \leq 1} f^*\left(\frac{1}{4} - \epsilon\right) \geq c^{-1} \left(2\left(\frac{1}{4} - \epsilon\right)\right)^{-\frac{1}{1+\epsilon}} \ell^{-\epsilon}\left(2\left(\frac{1}{4} - \epsilon\right)\right) \chi_{[0, 2(\frac{1}{4} - \epsilon)]}\left(\frac{1}{4} - \epsilon\right) \approx \left(\frac{1}{4} - \epsilon\right)^{-\frac{1}{1+\epsilon}} \ell^{-\epsilon}\left(\frac{1}{4} - \epsilon\right)$$

for all $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$. Together with (59), this gives

$$\sup_{\|f\|_A \leq 1} f^*(1 + \epsilon) \approx (1 + \epsilon)^{-\frac{1}{1+\epsilon}} \ell^{-\epsilon}(1 + \epsilon) =: h(1 + \epsilon) \text{ for all small } \epsilon \geq 0.$$

Since the function h is positive, continuous and non-increasing on some $(0, \varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$, and $\lim_{1+\epsilon \rightarrow 0} h(1 + \epsilon) = \infty$, this function h is a growth envelope function of the space $A = B_{1+\epsilon, 1+\epsilon}^{0, \frac{\epsilon+\epsilon^2-1}{1+\epsilon}}$.

As to the fine index, notice that $H(1 + \epsilon) := -\ln h(1 + \epsilon)$ satisfies $H'(1 + \epsilon) \approx \frac{1}{1+\epsilon}$ on some small interval $(0, \varepsilon)$. Therefore, $d\mu_H(1 + \epsilon) \approx \frac{1}{1+\epsilon} d(1 + \epsilon)$ and Theorem 3.1 implies that

(with the usual modification in the case $\epsilon = \infty$) whenever $1 + 2\epsilon \in [\max\{1 + \epsilon, 1 + \epsilon\}, \infty]$. On the other hand, it is also possible to prove that this cannot hold for $1 + 2\epsilon \in (0, \max\{1 + \epsilon, 1 + \epsilon\})$.

In order to see this, we shall show first that if (61) holds then it must be $\epsilon \geq 0$. We follow the same construction as in the proof of Step 3 of Theorem 3.1, now with $\omega^2 \in (0, \epsilon]$. Since we use (61) instead of (4), now the counterpart of (52) reads as

$$\left\| (1 + \epsilon)^{\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)(1+2\epsilon)}} \ell^\epsilon(1 + \epsilon) f^*(1 + \epsilon) \right\|_{1+2\epsilon, (0, \epsilon)} \lesssim (\ln \ell(y^2))^{\frac{1}{1+\epsilon}} \text{ for all } y^2 \in \left(0, \frac{\omega^2}{2}\right). \quad (62)$$

If we assumed that $\epsilon > 0$, then the left-hand side of (62) could be estimated from below by

$$\left(\int_{y^2}^{\omega^2} (1 + \epsilon)^{-1} \ell^{-\frac{1+2\epsilon}{1+3\epsilon}}(1 + \epsilon) d(1 + \epsilon) \right)^{\frac{1}{1+2\epsilon}} \approx \ell^{\frac{\epsilon}{(1+2\epsilon)(1+3\epsilon)}}(y^2) \text{ for all } y^2 \in \left(0, \frac{\omega^2}{2}\right),$$

and we would get a contradiction.

So, we have just shown that (61) implies $\epsilon \geq 0$. Consequently, $\frac{1}{\max\{1 + \epsilon, 1 + 2\epsilon\}} - \frac{1}{1 + 2\epsilon} = 0$ and we can now use Theorem 3.1 to show that $\epsilon \geq 0$.

Therefore, (61) holds if and only if $1 + 2\epsilon \in [\max\{1 + \epsilon, 1 + \epsilon\}, \infty]$.

Conclusion

We study mainly the worst-case in a Sobolev space for cubature and extremal systems of points with numerical integration over the sphere. An approximation of the constructive polynomial on the sphere was considered. We find the optimal lower bounds for cubature error in Sobolev spaces of arbitrary order. The quadrature in Besov spaces on the Euclidean sphere was shown. We obtain the Sobolev error estimates and determined the Bernstein inequality for scattered data interpolation, we also establish the spherical basis functions and construct the uniform distribution of points on spheres. We give the structure of the orthogonal inequalities and orthonormal polynomials with exponential-type weights. We investigate the sharp embeddings of Besov-type spaces involving only logarithmic smoothness.

درسنا الى حد بعيد الحالة الاسوأ في اطار فضاء سوبوليف للتكعيب والانظمة العظمي للنقاط طبقا للتكامل العددي فوق الكرة . تم ايجاد الحدييات الادني والامثل لخطا التكعيب في فضاءات سوبوليف للرتبة الاختيارية . اوضحنا التوزيع في فضاءات بيسوف علي الكرة الاقليدية . تم اعطاء تقديرات خطا سوبوليف وتحديد متباينة بير نشتاين لاستكمال البيانات والتبعثر . ايضا است دوال الاساس الكروي وبناء التوزيع المنتظم للنقاط علي الكرات . تم اعطاء تشييد كثيرات الحدود المتعامدة للمتباينات والمنظمة المتعامدة طبقا للمرجحات اسية النوع . وتقصينا الغمر القاطع للفضاءات نوع بيسوف المتضمنه الملسان اللوغاريتمي فقط.

List of Symbols

Symbols

H^3_2	: Hubert space
H^s	: Sobolev space
sup:	supremum
L_2	: Hilbert space
POL	: polynomial
avg	: average
min	: minimum
inf	: infimum
max	: maximum
det	: determinant
supp	: support
H^2	: Hilbert space
L^p	: Lebesgue space
$\oplus$	: Direct sum
ess	: essential
dim	: dimension
dist	: distant
RBF	: Radial Basis Function
RKHS	: Reproducing Kernel Hilbert Space
SBFs	: Spherical Basis Functions
W^2_2	: Sobolev space
vol	: volume
int	: interior
a.e	: almost every where
MRS	: Mhaskov – Rahmanov – Saff
deg	: degree
$B^{\sigma,b}_{p,r}$	: Besove spaces
L^∞	: Lebesgue space
$L^{loc}_{p,q,y}$	: Lorentz – Zygmund spaces
Loc	: Locally

$H^{\frac{3}{2}}$	: Hubert space
H^s	: Sobolev space
$\sup$	: supremum
L_2	: Hilbert space
POL	: polynomial
avg	: average
$\min$	: minimum
$\inf$	: infimum
$\max$	: maximum
$\det$	: determinant
supp	: support
H^2	: Hihbert space
L^p	: Lebesgue space
$\oplus$	: Direct sum
ess	: essential
$\dim$	: dimension
dist	: distant
RBF	: Radial Basis Function
$RKHS$	: Reproducing Kernel Hilbert Space
$SBFs$	: Spherical Basis Functions
W_2^2	: Sobolev space
vol	: volume
int	: interior
$a.e$	: almost every where
MRS	: Mhaskov – Rahmanov – Saff
deg	: degree
$B_{p,r}^{\sigma,b}$	: Besove spaces
L^∞	: Lebesgue space
$L_{p,q,y}^{loc}$	: Lorentz – Zygmund spaces
Loc	: Locally

References

- [1] A. Caetano, H.-G. Leopold, Local growth envelopes of Triebel-Lizorkin spaces of general type, *J. Fourier Anal. Appl.* 12 (2006) 427–445.
- [2] A.M. Caetano, W. Farkas, Local growth envelopes of Besov spaces of generalized smoothness, *Anwendungen* 25 (2006) 265–298.
- [3] A.M. Caetano, S.D. Moura, Local growth envelopes of spaces of generalized smoothness, *Math. Inequality Appl.* 7 (2004) 573–606.
- [4] A.M. Caetano, S.D. Moura, Local growth envelopes of spaces of generalized smoothness in the variable Lebesgue case, *Math. Nachr.* 273 (1) (2004) 43–57.
- [5] A. Gogatishvili, L. Pick, Discretization and anti-discretization of rearrangement-invariant function spaces, *Mat.* 47 (2) (2003) 311–358.
- [6] A. Gogatishvili, L. Pick, Embeddings and duality theorems for weak classical Lorentz spaces, *Math. Bull.* 49 (1) (2006) 82–95.
- [7] M. Goldman, Embeddings of Nikol'skii-Besov spaces into weighted Lorentz spaces, *Steklova* 180 (1987) 93–95 (in Russian).
- [8] M.L. Gol'dman, R. Kerman, On optimal embedding of Calderón spaces and generalizations, *Trudy Mat. Inst. Steklova* 243 (2003) 161–193 (in Russian) (English translation: *Proc. Steklov Inst. Math.* 243 (2003) 154–184).
- [9] P. Gurka, B. Opic, Sharp embeddings of Besov spaces with logarithmic smoothness, *Compositio Math.* 141 (2005) 81–110.
- [10] P. Gurka, B. Opic, Sharp embeddings of Besov-type spaces, *J. Comput. Appl. Math.* 208 (2007) 1–10.
- [11] G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, reprinted second ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [12] D.D. Haroske, Envelopes in function spaces—a first approach, preprint Math/Inf/16/01, University of Bayreuth, Germany, 2001 (cf. also D.D. Haroske, *Envelopes and sharp embeddings of function spaces*, CRC, Boca Raton, 2007).
- [13] V. Kolyada, Estimates of rearrangements and embedding theorems, *Mat. Sb.* 136 (1989) 1–21 (transl. in *Math. USSR-Sb.* 64(1) (1989) 1–21).
- [14] Yu. Netrusov, Theorems for the embedding of Besov spaces into ideal spaces, *Zh. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* 159 (1987) 69–82 (Russian) (English translation: *Math. Sb.* 159 (1989) 2871–2881).
- [15] B. Opic, A. Kufner, *Hardy-type Inequalities*, Pitman Research Notes in Mathematics, Series B, Vol. 321, Pitman, Science & Technology, Harlow, 1990.
- [16] H. Triebel, *The Structure of Functions*, Birkhäuser, Basel, 2001.
- [17] António M. Caetano, Amiran Gogatishvili, Bohumir Opic, Sharp embeddings of Besov spaces with logarithmic smoothness, *Journal of Approximation Theory* 152 (2008) 188 – 214.

Symmetry and Invariants

Haram Mobarak El Emam AL Haj

University of AL Zaiem Al Azhari. Faculty of Education , Department of Mathematics ,Sudan

M.A.Bashir

Academy of Engineering and Medical Sciences , Sudan

Abbas Abdel Aziz Gumaa Mahmoud

University of ALZaiem Al Azhari. Faculty of Education , Department of Mathematics , Sudan

المستخلص

في هذه الورقة تم توضيح أن هناك علاقة بين جبر لي لزمر تماثل نظم لاجرانج والكميات المحفوظة . من خلال استخدام نظرية نوثر لتحقيق هذا الهدف. كذلك استعمل هذه العلاقة لإيجاد ثوابت النظم الميكانيكية.

Abstract

In this paper we showed that there is a relationship between the Lie algebra of the symmetry groups for a Lagrangian system and the conserved quantities. We utilized Noether theorem to achieve this goal. We used this relationship to obtained the invariants of mechanical systems.

Keywords: Dynamical System, Lie Group, Lorentz Theorem , Noether Theorem, Invariants, symmetries.

1. Introduction:

Mechanics has two main points of view , (Lagrangian mechanics and Hamiltonian mechanics) In one sense, Lagrangian mechanics is more fundamental, since it is based on variational principles and it is what generalizes most directly to the general relativistic context. In another sense, Hamiltonian mechanics is more fundamental, since it is based directly on the energy concept and it is what is more closely tied to quantum mechanics .

Symmetry plays an important role in mechanics, from fundamental formulations of basic principles to concrete applications, such as stability criteria for rotating structures.

Lie symmetries is a powerful method for the determination of solutions in the theory of differential equations. A Lie symmetry is important as it provides invariants which can be used to write a new differential equation with less degree of freedom.

The Noether symmetry is an invariance of the Lagrangian action under the infinitesimal transformations of time and coordinates. Besides the Noether symmetry, there are two other important symmetries, i.e. the Lie symmetry and the form invariance. The Lie symmetry is a kind of invariance of the differential equations under the infinitesimal transformations of time and coordinates. The form invariance is a kind of invariance under which the transformed dynamical functions still satisfy the original differential equations of motion. A Noether symmetry can lead to a conserved quantity according to the Noether theory. A Lie symmetry or a form invariance can also lead to a conserved quantity under certain conditions. The conserved quantities deduced directly by the Noether symmetry, the Lie symmetry and the form invariance are called the Noether conserved quantity.

2.Lorentz Group and its Representations:

The Lorentz group starts with a group of four-by-four matrices performing Lorentz transformations on the four-dimensional Minkowski space of $\mathbb{R}^{1,3}$. The transformation leaves invariant the quantity $s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. There are three generators of rotations and three boost generators. Thus, the Lorentz group is a six-parameter group.

It was Einstein who observed that this Lorentz group is applicable also to the four-dimensional energy and momentum space of $\mathbb{R}^{1,3}$. In this way, he was able to derive his Lorentz-covariant energy-momentum relation commonly known as $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$. This transformation leaves m invariant. In other words, the particle mass is a Lorentz invariant quantity.

2.1 Generators of the Lorentz Group

Let us start with rotations applicable to the (x, y, z) coordinates. The four-by-four matrix for this operation is

$$Z(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1)$$

which can be written as

$$Z(\phi) = \exp(-i \phi J_3) \quad (2)$$

With

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

The matrix J_3 is known as the generator of the rotation around the z axis. It is not difficult to write the generators of rotations around the x and y axes, and they can be written as J_1 and J_2 respectively, with

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

These three rotation generators satisfy the commutation relations

$$[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k \quad (5)$$

The matrix which performs the Lorentz boost along the z direction is

$$B(\eta) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta & 0 & 0 \\ \sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\text{With } B(\eta) = \exp(-i \eta K_3), \quad (7)$$

And the generator

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

It is then possible to write the matrices for the generators K_1 and K_2 , as

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$[J_i, K_j] = i \varepsilon_{ijk} K_k, \text{ and } [K_i, K_j] = -i \varepsilon_{ijk} J_k \quad (10)$$

There are six generators of the Lorentz group, and they satisfy the three sets of commutation relations given in Eq. (5) and Eq. (10). It is said that the Lie algebra of the Lorentz group consists of these sets of commutation relations.

These commutation relations are invariant under Hermitian conjugation. While the rotation generator is Hermitian, the boost generators are anti-Hermitian

$$J_i^\dagger = J_i, \text{ while } K_i^\dagger = -K_i. \quad (11)$$

Thus, it is possible to construct two four-by-four representations of the Lorentz group, one with K_i and the other with $-K_i$. For this purpose we shall use the notation (Berestetskii 1982, Kim and Noz 1986)

$$\dot{K}_i = -K_i \quad (12)$$

Since there are two representations, transformations with K_i are called the covariant transformations, while those with $\dot{K}_i$ are called contravariant transformations.

1. Lie Symmetry Group:

In group theory, the symmetry group of a geometric object is the group of all transformations under which the object is invariant, endowed with the group operation of composition.

A Lie group is a smooth (C^∞) manifold G equipped with a group structure so that the map

$$M : G \times G \rightarrow G \quad (x, y) \mapsto xy \text{ and } \ell : G \rightarrow G \quad x \mapsto x^{-1} \text{ are smooth.}$$

Let θ be a 1-parameter group action on a differentiable manifold

$$M, \quad \theta : G \times M \rightarrow M \quad \theta(\varepsilon, x) \text{ then the infinitesimal generator of this action given by}$$

$$V_x = \frac{d}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} \theta(\varepsilon, x)$$

The one-generated group generated by vector field V as

$$\exp(\varepsilon V)x = \theta(\varepsilon, x)$$

Let a map $L_x : G \rightarrow G \quad y \mapsto xy$ (where L_x is the translation map). This action is called Left action. Then we have:

$$(L_x)_* : T_y G \rightarrow T_{xy} G$$

to the Lagrangian. But first we will quickly review the main physical implication of symmetry, which is that it implies the existence of conserved charges.

6.1.2 Noether's theorem (a conserved current):

Themainsymmetries we will beinterested in arecontinuous symmetries, where the transformation parameters are real (or complex) numbers, not just integers.

In field theory, the main tool with which to quantify the concept of symmetry is Noether's theorem, loosely speaking, it states that:

To every continuous symmetry of the action there corresponds a conserved current.

Here by a conserved current we mean a quantity, $j^\mu(x)$, built up of the fields in our Lagrangian, which satisfies the continuity equation

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (17)$$

This is a local condition, but it can be shown to imply that there exists a corresponding charge, the integral of the zero-component of the current over a large volume, which is constant in time:

$$Q = \int d^3x j^0(x) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} Q = \int d^3x \frac{\partial j^0(x)}{\partial t} = \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x) = 0 \quad (18)$$

Where we have used the divergence theorem in the last step.

Below I will sketch the derivation of Noether's theorem. Consider a Lagrangian $L(\phi^i)$

depending on a collection of fields $\{\phi^i\}$. Let us assume that L is invariant under a specific

combined transformation of those fields $\delta\phi^i$. (In other words, the transformation $\delta\phi^i$ is a symmetry). Performing the variation, we find

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \phi^i} \delta\phi^i + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta(\partial_\mu \phi^i) \quad (19)$$

Now use the identity

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta\phi^i \right] = \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) \delta\phi^i + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta(\partial_\mu \phi^i) \quad (20)$$

To rewrite (H5)

$$\delta L = \left[\frac{\partial L}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \delta\phi^i + \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta\phi^i \right] = 0 \quad (21)$$

The full expression is zero according to the action principle. But the terms in the square brackets are simply the Euler-Lagrange equations, and are equal to zero on their own. This implies that the second term is zero as well: But this equation has the form of a conserved current:

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \text{ where } \partial_\mu j^\mu = \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \delta\phi^i \quad (22)$$

Whatwe have shown (following Emily Noether) is that an invariance of the action ($\delta L = 0$ under the variation $\delta\phi^i$) has led to a conserved current (where $j^\mu(x)$ is the conserved Noether's current).

6.1.3 Conserved quantity

In mathematics, a conserved quantity of a dynamical system is a function H of dependent variables that is constant along each trajectory of the system.

A conserved quantity can be useful tool for qualitative analysis. Since most laws of physics express some kind of conservation, conserved quantities commonly exist in mathematics model of real systems. For example any mechanics model will have energy as a conserved quantity so long as the forces involved are conservative.

6.1.4 Differential equation

For a first order system of differential equation

$$\frac{dr}{dt} = f(r, t)$$

Where bold $\frac{dr}{dt}$ indicates vector quantities, $f(r, t)$ is a vector-valued function. $H(r)$

is a conserved quantity of the system if for all time and initial condition in some specific domain

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

By using the multivariate chain rule:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \nabla H \cdot \frac{dr}{dt} = \nabla H \cdot f(r, t) \\ \nabla H \cdot f(r, t) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Which contains information specific to the system and can be helpful in finding conserved quantities, or establishing whether or not a conserved quantity exists.

5. Hamiltonian and Lagrangian Mechanics

5.1 Hamiltonian mechanics

Here we discuss some special nonlinear ODE that have some very nice properties.

Definition 5.1.1

Let E be an open subset of $\mathbb{R}^{2n}$ and let $H \in C^2(E)$ where $H = H(x, y)$ with $x, y \in \mathbb{R}^n$. The system

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

Where

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \frac{\partial H}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^T, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \frac{\partial H}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)^T \quad (24)$$

Is called a Hamiltonian system with n degrees of freedom on E .

Properties of Hamiltonian System 5.1.2

(i) The equilibrium points of the Hamiltonian system correspond to the critical points of H .

- An equilibrium points (a_x, a_y) are called non-degenerate if the determinant second derivative of

H evaluated at the equilibrium point is nonzero,

$$\text{i.e. } \left| \frac{\partial^2 (a_x a_y)}{\partial (x, y)^2} \right| \neq 0$$

(ii) Hamiltonian systems are conservative, i.e., $H(x, y)$ remains constant along the trajectories

(iii) For a system defined by the Hamiltonian H a function f of the generalized coordinates q and generalized momentum $\vec{p}$ has time evaluation

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (25)$$

And hence is conversed if and only if $\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Here $\{f, H\}$ denotes the Poisson

Bracket.

Symmetries of Hamiltonian systems 5.1.3

Infinitesimal Transformation of the Hamiltonian 5.1.3.1 :

A one-parameter continuous group of (possibly time dependent) transformations of the dynamical variables which leave their time evolution invariant and therefore leave the

Lagrangian invariant up to total derivative, $\frac{dG(q)}{dt}$, induces the following infinitesimal transformations of Hamiltonian

$$\delta H = H(q', p', t) - H(q, p, t) = \varepsilon \frac{\partial F}{\partial t} + \varepsilon \frac{dG(q)}{dt}. \quad (26)$$

where F is the (possibly time dependent) generator of the corresponding canonical transformation $q, p \rightarrow q', p'$.

In this more general case, the Hamiltonian formulation of Noether theorem gives the following conservation law

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(F + G) = 0. \quad (27)$$

Hence, in order to get a conserved quantity we have to add the function G to the generator F of the canonical transformations.

Since the addition of a total derivative to the Lagrangian does not change the dynamics of the variables, q, q' , it leaves invariant all the observables $F(q, q')$ and has therefore the meaning of a gauge transformation.

In terms of the canonical variables the addition of the total derivative implies the following transformation of the canonical variables

$$q_i \rightarrow q_i, \quad p_i \rightarrow p_i - \frac{\partial G}{\partial q_i}. \quad (28)$$

which changes the relation between the conjugate momentum p_i and the time derivative of position equation (28) states that G is the canonical generator of such gauge transformation. It is worthwhile to recall that for a particle in a magnetic field x and $\dot{x}$ are observable (gauge invariant) quantities, but $p_i \equiv \dot{x}_i + (e/c)A_i$ is not.

ε

In conclusion for one- parameter continuous groups of transformations, which leave the dynamics invariant, but leave the Lagrangian or the Hamiltonian invariant only up to a total derivative, the conservation laws displays a sort of anomaly, the conserved quantity being the sum of the generator of the corresponding canonical transformation plus the generator G of the gauge transformation (28).

Symmetries of the Dynamics and Transformation of the Hamiltonian 5.1.3.2 :

The symmetry of the dynamics we mean a transformation of the dynamical variables such that their equations of motion are invariant. In the Lagrangian formulation, the dynamical variables are the Lagrangian coordinates q_i and their time derivatives $\dot{q}_i$ and a transformation.

$$q_i \rightarrow q'_i(q, \dot{q}, t), \quad \dot{q}_i \rightarrow \dot{q}'_i(q, \dot{q}, t) \quad (29)$$

is a symmetry of the dynamics if it leaves the equations of motion

$q'' = F_i(q, \dot{q}, t)$ invariant, i.e.

$$q''_i = F_i(q', \dot{q}', t). \quad (30)$$

Then, we have a complete characterization of the symmetries of the dynamics in terms of invariance properties of the Lagrangian.

Proposition 5.1.4 :

The invariance of the Lagrange equations under a (possible time dependent) transformation of the Lagrangian variables $q_i \rightarrow q'_i$, $\dot{q}_i \rightarrow \dot{q}'_i$ is equivalent to the invariance of the Lagrangian up to a total derivative

$$L'(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t) - \frac{dG(q)}{dt}. \quad (31)$$

Since the Lagrangian transforms covariantly under a change of the Lagrangian coordinates, namely

$$L'(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t). \quad (32)$$

Eq. (H0) (and therefore the symmetry of the dynamics) is equivalent to

$$L(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dG(q)}{dt}. \quad (33)$$

5.2 Lagrangian mechanics

Suppose a system is defined by Lagrangian L with generalized coordinates. If L has no explicit time dependence (so $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), then the energy E defined by

$$E = \sum_i \left[\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - L \quad (34)$$

Is conserved.

Furthermore, if $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$, then q is said to be cyclic coordinate and the generalized momentum

p defined by

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (35)$$

Is conserved.

5.3 Symmetries of Lagrangian systems

Invariance of the given variational integral under a group of symmetries implies that the associated Euler-Lagrange equations is also invariant under the group.

Theorem 5.3.1:

If G is a variational symmetry group of the functional $\ell[u] = \int_{\Omega_0} L(x, u^{(n)}) dx$, then G is a symmetry group of the Euler-Lagrange equations $E(L) = 0$.

Intuitively, what is happening is that if $g \in G$ and $u = f(x)$ is an extremal of $\ell[u]$, then clearly

$\tilde{u} = g \cdot f(\tilde{x})$ is an extremal of the transformed variational problem $\tilde{\ell}[\tilde{u}]$ coming from $(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u)$.

But if G is a variational symmetry group, $\tilde{\ell}[\tilde{u}] = \ell[\tilde{u}]$, hence $g \cdot f$ is also an extremal of ℓ .

It is *not* true that every symmetry group of the Euler-Lagrange equations is also a variational symmetry group of the original variational problem! The most common counterexamples are given by groups of scaling transformations.

6. Invariant:

6.1 Definition: If $F : M \rightarrow N$ is a diffeomorphism and X is a C^∞ vector field on M such that $F_*(X) = X$. that is, X is F -related to itself, then X is said to be invariant with respect to F . F - invariant.

6.2 Remark :

Let us define two diffeomorphism to Lie group called left translation L_a and right translation R_a by and defined by.

$$L_a : G \rightarrow G, L_a g = ag. \quad R_a : G \rightarrow G, R_a g = ga.$$

6.3 Action of Groups :

Important groups action is the following actions of G on itself. Left action: $L_g : G \rightarrow G$ is defined by $L_g(h) = gh$.

Right action: $R_g : G \rightarrow G$ is defined by $R_g(h) = hg^{-1}$.

Adjoint action: $Ad_g : G \rightarrow G$ is defined by $Ad_g(h) = ghg^{-1}$.

Easily sees that left and right actions are transitive; in fact, each of them is simply transitive. It is also easy to see that left and right actions are commute and that

$$Ad_g = L_g R_g.$$

Each of these actions also defines the action of G on the spaces of functions, vector fields, for etc. On G .

5.3 Symmetries of Lagrangian systems

Invariance of the given variational integral under a group of symmetries implies that the associated Euler-Lagrange equations is also invariant under the group.

Theorem 5.3.1:

If G is a variational symmetry group of the functional $\ell[u] = \int_{\Omega_0} L(x, u^{(n)}) dx$, then G is a symmetry group of the Euler-Lagrange equations $E(L) = 0$.

Intuitively, what is happening is that if $g \in G$ and $u = f(x)$ is an extremal of $\ell[u]$, then clearly

$\tilde{u} = g \cdot f(\tilde{x})$ is an extremal of the transformed variational problem $\tilde{\ell}[\tilde{u}]$ coming from $(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u)$.

But if G is a variational symmetry group, $\tilde{\ell}[\tilde{u}] = \ell[\tilde{u}]$, hence $g \cdot f$ is also an extremal of ℓ .

It is *not* true that every symmetry group of the Euler-Lagrange equations is also a variational symmetry group of the original variational problem! The most common counterexamples are given by groups of scaling transformations.

6. Invariant:

6.1 Definition: If $F : M \rightarrow N$ is a diffeomorphism and X is a C^∞ vector field on M such that $F_*(X) = X$. that is, X is F -related to it- self, then X is said to be invariant with respect to F , or F -invariant.

6.2 Remark :

Let us define two diffeomorphism to Lie group called left translation L_a and right translation R_a by and defined by.

$$L_a : G \rightarrow G, L_a g = ag. \quad R_a : G \rightarrow G, R_a g = ag.$$

6.3 Action of Groups :

Important groups action is the following actions of G on itself. Left action: $L_g : G \rightarrow G$ is

defined by $L_g(h) = gh$.

Right action: $R_g : G \rightarrow G$ is defined by $R_g(h) = hg^{-1}$.

Adjoint action: $Ad_g : G \rightarrow G$ is defined by $Ad_g(h) = ghg^{-1}$.

Easily sees that left and right actions are transitive; in fact, each of them is simply transitive. It is also easy to see that left and right actions are commute and that

$$Ad_g = L_g R_g.$$

Each of these actions also defines the action of G on the spaces of functions, vector fields, forms, etc. On G .

6.4 Definition:

A vector field $v \in \text{Vect}(G)$ is left-invariant if $g \cdot v = v$ for every, $g \in G$ and right-invariant if $v \cdot g = v$, for every $g \in G$. A vector field is called bi-invariant if it is both left- and right-invariant.

6.5 Definition (Left invariant vector field)

By using left translations to transport around tangent vectors on G . put $g_1 = T_e G$, The tangent space to G at the neutral element $e \in G$. For $X \in g_1$ and $g \in G$ define.

$$L_x(g) = T_e \lambda_g, \quad X \in T_g G.$$

6.6 Definition:

Let G is a Lie group. A vector field $\xi \in \chi(G)$ is called left invariant if and only if $(\lambda_g)^* \xi = \xi$ for all $g \in G$. The space of left invariant vector fields is denoted by $\chi_L(G)$.

6.7 Definition: (Right invariant vector fields)

We have used left translations to trivialize the tangent bundle of a Lie group G ; one can consider the right trivialization. $TG \rightarrow G \times g_1$ Defined by

$\xi_g \rightarrow (g, T_g \rho^{g^{-1}} \cdot \xi)$. The inverse of this map is denoted by $(g, X) \rightarrow R_X(g)$, and R_X is called the right-invariant vector field generated by $X \in g_1$. In general, a vector field $\xi \in \chi(G)$ is called right invariant if $(\rho^g)^* \xi = \xi$ for all $g \in G$. The space of right invariant vector fields is denoted by $\chi_R(G)$.

$\xi = \xi(e)$ and $X \rightarrow R_X$. Are inverse bijections between g and $\chi_R(G)$.

6.8 Proposition :

Let G be a Lie group, then, the vector space of all left-invariant vector fields on G is isomorphic (as a vector space) to $T_1 G$.

$$\Gamma(TG)^G \cong T_1 G.$$

We now give $T_1 G$ a Lie algebra structure by identifying it with $\Gamma(TG)^G$ with the Lie bracket of vector fields. But, we need to show that $[\cdot, \cdot]$ is in fact a binary operation on $\Gamma(TG)^G$, recall if $f : M \rightarrow N$ is a smooth map of manifolds and X, Y are f -related if $d(X(x)) = Y(f(x))$ for every $x \in M$. It is a fact from manifolds theory that if X, Y and X', Y' are f -related, then so are $[X, Y]$ and $[X', Y']$, but, left invariant vector fields are L_a related for all $a \in G$ by definition.

6.9 Proposition :

The Lie bracket of two left vector fields is a left invariant vector field. Thus we can $T_1 G$ regard as Lie algebra.

6.10 Definition: Let G be a group, the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G is $T_1 G$ with the Lie bracket induced by its identification with $\Gamma(TG)^G$.

6.11 Corollary: Suppose $\ell[u] = \int L(x, u^{(1)}) dx$ is a first order variational problem, and v as

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (36)$$

A variational symmetry. Then

$$p_i = \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} + \xi^i L - \sum_{\alpha=1}^q \sum_{j=1}^p \xi^j u_j^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}, \quad i=1, \dots, p, \quad (37)$$

Form the components of a conservation law $\text{Div } P = 0$ for the Euler-Lagrange equations $E(L) = 0$.

6.12 Example: Consider a system of n particles moving in $\mathbb{R}^3$ subject to some potential force field. The kinetic energy of this system takes the form

$$K(x) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha |x^\alpha|^2,$$

Where m_α is the mass and $x^\alpha = (x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha)$ the position of the α -th particle.

The potential energy $U(t, x)$ will depend on the specific problem; for instance,

$$U(t, x) = \sum \gamma_{\alpha\beta} |x^\alpha - x^\beta|^{-1}$$

Might depend only on the pairwise gravitational interaction between masses, or if $(n=1)$ we may have the central gravitational force of Kepler's problem.

Newton's equations of motion

$$m_\alpha \ddot{x}_\alpha^\alpha = -\nabla_\alpha U \equiv -\left(U_{x^\alpha}, U_{y^\alpha}, U_{z^\alpha}\right), \quad \alpha=1, \dots, n,$$

Are in variational form, being the Euler-Lagrange equations for the action integral $\int_{-\infty}^{\infty} (K - U) dt$.

A vector field

$$v = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\alpha} \xi^\alpha(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \equiv \tau \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\alpha} \left(\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \zeta^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right)$$

Will generate a variational symmetry group if and only if

$$pr^{(1)} v(K - U) + (K - U) D_t \tau = 0 \quad (38)$$

For all (t, x) . Noether's theorem immediately provides a corresponding conservation law or first integral

$$T = \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \xi^\alpha \cdot \dot{x}^\alpha - \tau E = \text{constant} \quad (39)$$

Where $E = K + U$ is the total energy of the system.

Conclusion:

The aim of this paper is to study symmetries of Lagrangian and Hamiltonian systems using Lie algebra of the symmetry Lie groups.

The importance of this paper is that one can determine the invariants of a symmetrical system using the Lie algebra of its symmetry Lie group. This has been illustrated via some examples.

References:

- (1) Baskal, S ; Kim, Y. S ; Noz, M. E. 2014. Wigner's Space - Time Symmetries based on the Two - by - Two Matrices of the Damped Harmonic Oscillators and the Poincare' Sphere . Symmetry, 6 473 - 515.
- (2) Berestetskii, V. B ; Pitaevskii, L. P ; Lifshitz, E. M. 1982 . Quantum Electrodynamics . Volume 4 of the course of Theoretical Physics 2nd Ed . pergamon Press : Oxford , UK.
- (3) Dirac, P. A. M. 1945a . Unitary Representations of the Lorentz Group . Proc . Roy . Soc . (London) A 183 284 - 295 .
- (4) Dirac, P. A. M. 1945b . Applications of quaternions to Lorentz Transformations . Proc . Roy . Irish Acad . (Dublin) A50 261 - 270.
- (5) F. X. Mei, H. B. Wu, Y. F. Zhang . 2013, Symmetries and conserved quantities of constrained Mechanical Systems . Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2,285-303.
- (6) Jerrold E. Marsden, Pasadena, California, and Tudor S. Ratiu, Santa Cruz, California, Introduction to Mechanics and Symmetry A Basic Exposition of Classical Mechanics Systems, Second Edition, 1998.
- (7) Kim, Y. S ; Noz, M. E. 1986 . Theory and Applications of the Poincare' Group . Reidel: Dordrecht, The Netherlands.
- (8) Peter J. Olver . 1986 . Applications of Lie Groups to Differential Equations, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 279-281,259, ISBN-13:978-1-4684-0276-6.
- (9) Naimark, M. A. 1954 . Linear Representations of the Lorentz Group . Uspekhi Mat . Nauk 9 No. 4(62). 19 - 93. An English Version of this article (translated by F. V. At Kinson).
- (10) Sibel Baskal, Department of Physics ; Middle East Technical University, 06800 Ankara, Turkey, Young S. Kim, Center for Fundamental Physics, University of Maryland, College Park, Maryland 20742, U.S.A ; Marilyn E. Noz ; Department of Radiology, New York University, New York, NY 10016 U.S.A ; Physics of the Lorentz Group, 1 - 5 .

Topological vector space

Dr. Tagreed Ahmed fadeel Mohamed

Shaqra university -Saudi Arabia

Abstract :

In this paper, we introduce the concept of weak linear topology on a topological vector space as a generalization of usual weak topology space .In the case, we show that the application of vector space topology .

المستخلص:-

هذه الورقة العلمية تختص بدراسة الفضاء التوبولوجي المتجه والذي يصنف كفضاء ضعيف باستخدام فضاء

باناخ .

Key words : Topological space, Separation theorems , Spaces of smooth functions, Banach algebras.

1-Introduction:-

The general topology which needs some mathematical concepts of **vector Space**. Suppose that V is a set upon which we have defined two operations **addition**, which combines two elements of V and is denoted by “+”, and **multiplication**, which combines a complex number with an element of V and is denoted by just aposition.

One of the most important concepts is the mathematical logic and how its use facilities in proving different problems. Some concepts of the mathematical analyses like differentiation and integration must be studied before.

Definition 1-1- Topological space. A topological space is a set S with a collection τ of subsets (called the open sets) that contains both S and ϕ , and is closed under arbitrary union and finite intersections. A topological space is the most basic concept of a set endowed with a notion of neighborhood.

Definition 1-2- Open neighborhood. In a topological space (S, τ) , a neighborhood of a point x is an open set that contains x . We will denote the collection of all the neighborhoods of x by

$$N_x = \{U \in \tau \mid x \in U\}.$$

Topological spaces are classified according to certain additional properties that they may satisfy. A property satisfied by many topological spaces concerns the separation between points:

Definition 1-3- Hausdorff space. A topological space is a Hausdorff space if distinct points have distinct neighborhoods, i.e., $\forall x \neq y$ there are $U_x \in N_x$ and $U_y \in N_y$ such that

| The Hausdorff property is required, for example, for limits to be unique.

Definition 1-4- Base. In a topological space (S, τ) , a collection $\tau' \subset \tau$ of open sets is a base for τ if every open set is a union of members of τ' .

Bases are useful because many properties of topologies can be reduced to statements about a base generating that topology.

Example 1-5- The open balls

$$B(x, a) = \{y \in S \mid d(y, x) < a\}$$

form a base for a topology in a metric space.

Definition 1-6- Local base. Let (S, τ) be a topological space and let $x \in S$. A collection $\gamma_x \subset N_x$ is called a local base at x if every neighborhood of x contains an element of γ_x . It is easy to see that the union of all local bases is a base for topology. Indeed, let $A \in \tau$. Let $x \in A$. Since A is a neighborhood of x , then the definition of the local base, there exists a $U_x \in \gamma_x$ such that $U_x \subset A$. Clearly,

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x$$

which proves that $\bigcup_{x \in S} \gamma_x$ is a base for τ .

Definition 1-7- Closure. Let (S, τ) be a topological space and let $E \subset S$. The closure of E , denoted $\bar{E}$, is the set of all points all of whose neighborhoods intersect E :

$$E = \{x \in S \mid \forall U \in \mathcal{N}_x, U \cap E \neq \emptyset\}.$$

Definition 1-8- Induced topology. Let (S, τ) be a topological space and let $E \subset S$. Then $\tau \cap E$ is called the induced topology on E .

Definition 1-9- Limit. A sequence (x_n) in a Hausdorff space (S, τ) converges to a limit $x \in S$ if every neighborhood of x contains all but finitely many points of the sequence. So that two notions: that of a vector space and that of a topological space.

Definition 1-10- Topological vector space. Let V be a vector space endowed with a topology τ . The pair (V, τ) is called a topological vector space if

1. For every point $x \in V$, the singleton $\{x\}$ is a closed set (namely, $\{x\}^c \in \tau$).
2. The vector space operations are continuous with respect to τ .

Comment 1-11- The first condition is not required in all texts.

The second condition means that the mappings:

$$V \times V \rightarrow V \quad (x, y) \mapsto x + y$$

$$F \times V \rightarrow V \quad (a, x) \mapsto ax$$

are continuous. That is, for every $x, y \in V$,

$$(\forall V \in \mathcal{N}_{x+y})(\exists V_x \in \mathcal{N}_x, V_y \in \mathcal{N}_y) : (V_x + V_y \subset V),$$

and for every $x \in V$ and $a \in F$,

$$(\forall V \in \mathcal{N}_{ax})(\exists V_x \in \mathcal{N}_x, V_a \in \mathcal{N}_a) : (V_a \cdot V_x \subset V).$$

Having defined a topological vector space, we proceed to define notions concerning subsets:

Definition 1-12-Bounded set. Let X be a topological vector space. A subset

$E \subset \chi$ is said to be bounded if

$$(\forall \in \mathcal{N}_0)(\exists s \in \mathbb{R}) : (\forall t > s)(E \subset tV).$$

That is, every neighborhood of zero contains E after being blown up sufficiently. side with the metric notion of boundedness.

Definition 1-13- With every $a \in \chi$ we associate a translation operator, $T_a : \chi \rightarrow \chi$, defined by

$$T_a x = x + a,$$

and with every $0 \neq a \in F$ we associate a multiplication operator, $M_a : \chi \rightarrow \chi$, defined by

$$M_a x = ax.$$

Proposition 1-14- Both T_a and M_a are homeomorphisms of χ onto χ .

Proof. Both T_a and M_a are bijections by the vector space axioms. Their inverses are T_{-a} and $M_{1/a}$. All are continuous by the very definition of a topological vector space.

Corollary 1-15 Every open set is translationally invariant: $E \subset \chi$ is open if and only if $a + E$ is open for every $a \in \chi$. In particular,

$$\mathcal{N}_a = a + \mathcal{N}_0.$$

Hence the topology is fully determined by the neighborhoods of the origin. this a classification of various types of topological vector spaces:

Definition 1-16 Let (χ, τ) be a topological vector space.

1. χ is **locally convex** if there exists a local base at 0 whose members are convex.
2. χ is **locally bounded** if 0 has a bounded neighborhood.
3. χ is **locally compact** if 0 has a neighborhood whose closure is compact.
4. χ is **metrizable** if it is compatible with some metric d (i.e., τ is generated by the open balls $B(x, a) = \{y \in \chi : d(y, x) < a\}$).
5. χ is an **F-space** if its topology is induced by a complete translationally invariant metric. Every Banach space is an F-space. An F-space is a

Banach space if in addition $d(\alpha x, 0) = |\alpha| d(x, 0)$.

6. χ is a Frechet space if it is a locally convex F-space.
7. χ is normable if it can be endowed with a norm whose induced metric is compatible with τ .
8. χ has the Heine-Borel property if every closed and bounded set is compact.

Hahn-Banach properties. Weak topologies, which we will investigate later are always locally convex. We will prove that the only topological vector spaces that are locally compact are finite dimensional. We will prove that a topological vector space is metrizable if it has a countable local base at the origin, which in turn, is guaranteed if the space is locally bounded. We will prove that a topological vector space is normable if and only if it is both locally convex and locally bounded.

2 - Separation theorems

A topological vector space can be quite abstract. All we know is that there is a vector space structure and a topology that is compatible with it. We have to start make our way from these very elementary concepts.

Lemma 2-1 Let χ be a topological vector space. $W \in \mathcal{N}_0 \exists U \in \mathcal{N}_0^{sym}$ such that $U + U \subset W$.

Proof Since $0+0=0$ and addition is continuous, There exist neighborhoods $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_0$ such that

$$V_1 + V_2 \subset W$$

Set

$$U = V_1 \cap (-V_1) \cap V_2 \cap (-V_2)$$

U is symmetric; it is an intersection of four open sets that contain zero, hence it is a non-empty neighborhood of zero. Since $U \subset V_1$ and $U \subset V_2$ it follows that

$$U + U \subset W$$

Lemma 2-2 Let χ be a topological vector space.

$$\forall W \in \mathcal{N}_0 \exists V \in \mathcal{N}_0^{sym} \text{ such that } V + V + V + V \subset W.$$

Theorem 2-3 Let χ be a topological vector space. Let $K, C \subset \chi$ satisfy:

K is compact, C is closed and $K \cap C = \emptyset$.

Then there exists a $V \in \mathcal{N}_0$ such that

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset.$$

In other words, there exist disjoint open sets that contain K and C .

Comment 2-4 Thus, a topological vector space is regular (a topological space is regular if separates points from closed sets that do not include that point).

Example 2-5 (The open balls)

$$B(x, a) = \{y \in S \mid d(y, x) < a\}$$

form a base for a topology in a metric space.

Definition 2-6 (Local base) Let (S, τ) be a topological space and let $x \in S$. A collection $\gamma_x \subset \mathcal{N}_x$ is called a local base at x if every neighborhood of x contains an element of γ_x . It is easy to see that the union of all local bases is a base for the topology. Indeed, let $A \in \mathcal{t}$. Let $x \in A$. Since A is a neighborhood of x , then by the definition of the local base, there exists a $U_x \in \gamma_x$ such that $U_x \subset A$. Clearly,

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x$$

which proves that $\bigcup_{x \in S} \gamma_x$ is a base for τ .

Definition 2-7 Closure. Let (S, τ) be a topological space and let $E \subset S$. The closure of E , denoted $\bar{E}$, is the set of all points all of whose neighborhoods intersect E :

$$\bar{E} = \{x \in S \mid \forall U \in \mathcal{N}_x, U \cap E \neq \emptyset\}.$$

Definition 2-8 Induced topology. Let (S, τ) be a topological space and let $E \subset S$. Then $\tau \cap E$ is called the induced topology on E .

Definition 2-9 Limit. A sequence (x_n) in a Hausdorff space (S, τ) converges to a limit $x \in S$ if every neighborhood of x contains all but finitely many points of the sequence. So we have two notions: that of a vector space and that of a topological space.

Definition 2-10 Topological vector space. Let V be a vector space endowed with a topology τ . The pair (V, τ) is called a topological vector space if

1. For every point $x \in V$, the singleton $\{x\}$ is a closed set (namely, $\{x\}^c \in \tau$).
2. The vector space operations are continuous with respect to τ .

Comment 2-11 The first condition is not required in all texts.

The second condition means that the mappings:

$$V \times V \rightarrow V \quad (x, y) \mapsto x + y$$

$$F \times V \rightarrow V \quad (a, x) \mapsto ax$$

are continuous. That is, for every $x, y \in V$,

$$(\forall V \in \mathcal{N}_{x+y})(\exists V_x \in \mathcal{N}_x, V_y \in \mathcal{N}_y) : (V_x + V_y \subset V),$$

and for every $x \in V$ and $a \in F$,

$$(\forall V \in \mathcal{N}_{ax})(\exists V_x \in \mathcal{N}_x, V_a \in \mathcal{N}_a) : (V_a \cdot V_x \subset V).$$

Having defined a topological vector space, we proceed to define notions concerning subsets:

Definition 2-12 Bounded set. Let X be a topological vector space. A subset

$E \subset X$ is said to be bounded if

$$(\forall V \in \mathcal{N}_0)(\exists s \in \mathbb{R}) : (\forall t > s)(E \subset tV).$$

That is, every neighborhood of zero contains E after being

Definition 2-13 Balanced set. Let X be a topological vector space. A subset $E \subset X$ is said to be balanced if

$$\forall a \in F, \quad |a| \leq 1 \quad aE \subset E.$$

We denote the set of balanced neighborhoods of zero by $\mathcal{N}_0^{bal}$

The notion of being balanced is purely algebraic. When we talk about balanced neighborhoods we connect the algebraic concept to the topological concept. Note that in $\mathbb{C}$ the only balanced sets are discs and the whole of $\mathbb{C}$.

Definition 2-14 Symmetric set. Let χ be a topological vector space. A subset $E \subset \chi$ is said to be symmetric if

$$x \in E \text{ implies } (-x) \in E,$$

namely $(-E) = E$. We denote the set of symmetric neighborhoods of x by $\mathcal{N}_x^{sym}$

Symmetry is also an algebraic concept. Every balanced set is symmetric.

Definition 2-15 With every $a \in \chi$ we associate a translation operator, $Ta : \chi \rightarrow \chi$, defined by

$$T_a x = x + a,$$

and with every $0 \neq a \in F$ we associate a multiplication operator, $Ma : \chi \rightarrow \chi$, defined by

$$M_a x = ax.$$

Proposition 2-16 Both T_a and M_a are homeomorphisms of χ onto χ .

Proof. Both T_a and M_a are bijections by the vector space axioms. Their inverses are T_{-a} and $M_{1/a}$. All are continuous by the very definition of a topological vector space.

Corollary 2-17 Every open set is translationally invariant: $E \subset \chi$ is open if and only if $a + E$ is open for every $a \in \chi$. In particular,

$$\mathcal{N}_a = a + \mathcal{N}_0$$

Hence the topology is fully determined by the neighborhoods of the origin.

Definition 2-18 Let (χ, τ) be a topological vector space.

1. χ is **locally convex** if there exists a local base at 0 whose members are convex.
 2. χ is **locally bounded** if 0 has a bounded neighborhood.
 3. χ is **locally compact** if 0 has a neighborhood whose closure is compact.
 4. χ is **metrizable** if it is compatible with some metric d (i.e., τ is generated by the open balls $B(x, a) = \{y \in \chi \mid d(y, x) < a\}$).
 5. χ is an **F-space** if its topology is induced by a complete translationally invariant metric. Every Banach space is an F-space. An F-space is a Banach space if in addition $d(ax, 0) = |a| d(x, 0)$.
 6. χ is a **Frechet space** if it is a locally convex F-space.
 7. χ is **normable** if it can be endowed with a norm whose induced metric is compatible with τ .
 8. χ has the **Heine-Borel property** if every closed and bounded set is compact.
- Hahn-Banach properties.** Weak topologies, which we will investigate later are always locally convex. We will prove that the only topological vector spaces that are locally compact are finite dimensional. We will prove that a topological vector space is metrizable if it has a countable local base at the origin, which in turn, is guaranteed if the space is locally bounded. We will prove that a topological vector space is normable if and only if it is both locally convex and locally bounded.

3- Separation theorems

A topological vector space can be quite abstract. All we know is that there is a vector space structure and a topology that is compatible.

Lemma 3-1 Let χ be a topological vector space.

$\forall W \in \mathcal{N}_0 \exists U \in \mathcal{N}_0^{sym}$ such that $U + U \subset W$.

Proof. Since $0+0=0$ and addition is continuous, there exist neighborhoods $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_0$ such that

$$V_1 + V_2 \subset W$$

Set

$$U = V_1 \cap (-V_1) \cap V_2 \cap (-V_2)$$

U is symmetric; it is an intersection of four open sets that contain zero, hence it is a non-empty neighborhood of zero. Since $U \subset V_1$ and $U \subset V_2$ it follows that

$$U + U \subset W$$

Lemma 3-2 Let χ be a topological vector space.

$$\forall W \in \mathcal{N}_0 \exists V \in \mathcal{N}_0^{sym} \text{ such that } V + V + V + V \subset W.$$

Theorem 3-3 Let χ be a topological vector space. Let $K, C \subset \chi$ satisfy: K is compact, C is closed and $K \cap C = \emptyset$.

Then there exists a $V \in \mathcal{N}_0$ such that

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset.$$

There are there exist disjoint open sets that contain K and C .

Comment 3-4 The a topological vector space is regular (a topological space is regular if separates points from closed sets that do not include that point).

Proof- Let $x \in K$. Since C^c is an open neighborhood of x , it follows from the above lemma that there exists a $V_x \in \mathcal{N}_0^{sym}$ such that

$$x + V_x + V_x + V_x \in C^c$$

i.e

$$(x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \emptyset.$$

Since V_x is symmetric,

$$(x + V_x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset.$$

For every $x \in K$ corresponds such a V_x . Since K is compact, there exists a finite collection of $(x_i, V_{xi})_{i=1}^n$ such that

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{xi})$$

$$V = V_{x1} \cap \dots \cap V_{xn}.$$

Then, for every i ,

$(x + V_{xi} + V_{xi})$ does not intersect $(C + V_{xi})$

and a for interior,

$(x + V_{xi} + V_{xi})$ does not intersect $(C + V)$.

Taking the union over i :

$K + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{xi} + V)$ does not intersect $(C + V)$.

Comment 3-5 Since $K + V$ and $C + V$ are both open and mutually disjoint, it follows that also

$\overline{K + V}$ does not intersect $C + V$.

Indeed, if $x \in C + V$ then there exists $U \in \mathcal{N}_x$ such that

$$U \subset C + V$$

But since $x \in \overline{K + V}$, every neighborhood of x , and U in particular, intersects $K + V$, i.e., where exists a $y \in U$ satisfying

$$y \in (K + V) \cap (C + V),$$

which is a contradiction.

Corollary 3-6 Let $\mathcal{B}$ be a local base at zero for a topological vector space $\mathcal{X}$.

Then every member in $\mathcal{B}$ contains the closure of some other member in $\mathcal{B}$. That is,

$$\forall U \in \mathcal{B} \exists W \in \mathcal{B} \text{ such that } \overline{W} \subset U.$$

Proof. Let $U \in \mathcal{B}$. Let $K = \{0\}$ (compact) and $C = U^c$ (closed). By Theorem 3.5 there exists a $V \in \mathcal{N}_0^{sym}$, such that

$$V \cap (U^c + V) = \emptyset.$$

It follows that

$$V \subset (U^c + V)^c \subset U.$$

By the definition of a local base there exists a neighborhood $W \in \mathcal{B}$ such that

$$W \subset V \subset (U^c + V)^c \subset U.$$

$(U^c + V)^c$ is closed,

$$W \subset (U^c + V)^c \subset U$$

lary 3-7 Every topological vector space χ is Hausdorff.

osition 3-8 Let χ be a topological vector space.

For $A \subset \chi$,

$$A = \bigcap_{V \in \mathcal{N}_0} (A + V)$$

that is, the closure of a set is the intersection of all the open neighborhoods of that set.

$$\overline{A + B} \subset \overline{A + \overline{B}}.$$

If $\mathcal{Y} \subset \chi$ is a linear subspace, then so is $\overline{\mathcal{Y}}$.

If C is convex so is $\overline{C}$.

If C is convex so is C° .

For every $B \subset \chi$: if B is balanced so is $\overline{B}$.

For every $B \subset \chi$: if B is balanced and $0 \in B^\circ$ then B° is balanced.

If $E \subset X$ is bounded then so is $\overline{E}$.

f.

$x \in \overline{A}$. By definition, for every $V \in \mathcal{N}_0$, $x + V$ intersects A , of $A - V$. Thus,

$$x \in \bigcap_{V \in \mathcal{N}_0} (A - V) = \bigcap_{V \in \mathcal{N}_0} (A + V)$$

Conversely, suppose that $x \notin \bar{A}$. Then, there exists a $V \in \mathcal{N}_0$ such that $x + V$ does not intersect A , i.e., $x \notin A + V$, hence

$$x \notin \bigcap_{V \in \mathcal{N}_0} (A + V)$$

conclusion:

many properties of topologies can be reduced to statements about a base generating that topology. Then the topological vector spaces that are locally compact are finite dimensional. And a topological vector space is metrizable if it has a countable local base at the origin, which in turn, is locally bounded.

References

- (1) Cattaneo, A. G., Felder, 2000, "A path integral approach to the Kontsevich quantization formula", *Comm. Math. Phys.*, 2 -
- Cattaneo, A. G., Fedler, 2001, "Poisson sigma models and symplectic groupoids, in: N.P. Landsman, M. Pflaum, M. Schlichenmaier (Eds.), *Quantization of Singular Symplectic Quotients*", Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin.
- (2) Cannas da Silva, A., A. Weinstein, 1999, *Geometric Models for Non-commutative Algebras*, in: *Berkeley Mathematics Lecture Notes*, AMS.
- (3) Boyer, C, B. Mann, J. Hurtubise and R. Milgram, 1993, "The topology of instanton moduli spaces, the Atiyah-Jones conjecture *Annals of Math.* 137.
- (4) Conlon, L., 2001, *Differentiable Manifolds*, 2nd ed., Birkhäuser, Boston.
- (5) E. Calabi Extremal Kahler, 1983. "Metrics In: *Seminar in Differential geometry*", (ed. Yau) Princeton U.P.
- (6) F. Bonechi, M. Zabzine, 2005, "Poisson Sigma Model Over Group Manifolds", *J. Geom. Phys.* 54, p 173-196.